

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRƯỜNG THỊ THÚY VÂN

TÍNH NỘI XẠ, XẠ ẢNH CỦA MÔĐUN
VÀ MỘT SỐ LỚP VÀNH LIÊN QUAN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Đà Nẵng - Năm 2025

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRƯỜNG THỊ THÚY VÂN

TÍNH NỘI XẠ, XẠ ẢNH CỦA MÔĐUN
VÀ MỘT SỐ LỚP VÀNH LIÊN QUAN

Ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số: 9460104

LUẬN ÁN TIẾN SĨ

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

- PGS.TS. Trương Công Quỳnh
- TS. Trần Hoài Ngọc Nhân

Đà Nẵng - Năm 2025

Mục lục

LỜI CAM ĐOAN	iii
LỜI CẢM ƠN	iv
TÓM TẮT ĐỀ TÀI BẰNG HAI NGÔN NGỮ TIẾNG VIỆT VÀ TIẾNG ANH	v
DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU	vii
DANH MỤC CÁC THUẬT NGỮ	viii
MỞ ĐẦU	1
1 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	8
1.1 Một số ký hiệu và khái niệm liên quan	8
1.2 Các mở rộng của môđun nội xạ và xạ ảnh	10
1.3 Một số lớp vành liên quan	14
2 LỚP MÔĐUN GIẢ XẠ ẢNH VÀ CÁC VÀNH LIÊN QUAN	24
2.1 Môđun giả xạ ảnh trên vành nửa hoàn chỉnh, vành hoàn chỉnh . . .	24
2.2 Môđun giả xạ ảnh trên vành nửa di truyền, vành di truyền	29
2.3 Môđun giả xạ ảnh trên vành nửa địa phương và vành Artin idêan chính	34
3 LỚP A-VÀNH VÀ TỔNG QUÁT HÓA	39
3.1 Lớp a -vành phải	39
3.1.1 Lớp a -vành phải I -hữu hạn	39
3.1.2 Lớp a -vành phải nửa hoàn chỉnh có đế cốt yếu	43
3.2 Vành mà mỗi idêan phải bất biến lũy linh	48
3.2.1 Định nghĩa và các tính chất	48
3.2.2 Sự phân tích của n -vành phải và các vành liên quan	53
3.2.3 Môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức	60

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	65
TÀI LIỆU THAM KHẢO	66
DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ	70

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan các kết quả được nghiên cứu và trình bày trong luận án này là của riêng tôi hoặc của đồng tác giả và đã được các đồng tác giả cho phép tôi đưa vào luận án.

Đà Nẵng, ngày 19 tháng 06 năm 2025
Nghiên cứu sinh

Trương Thị Thúy Vân

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng, dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Trương Công Quỳnh và TS. Trần Hoài Ngọc Nhân.

Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến PGS.TS. Trương Công Quỳnh vì sự hướng dẫn tận tình và những định hướng quý báu mà Thầy đã dành cho tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và thực hiện luận án. Thầy không chỉ truyền đạt kiến thức chuyên môn mà còn luôn động viên, khích lệ tôi vượt qua những khó khăn trong quá trình nghiên cứu.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến TS. Trần Hoài Ngọc Nhân vì sự chia sẻ kiến thức, kinh nghiệm và sự hỗ trợ quý báu trong suốt quá trình thực hiện luận án.

Tôi xin cảm ơn GS.TS. Lê Văn Thuyết, PGS.TS. Nguyễn Chánh Tú và TS. Nguyễn Ngọc Châu đã tận tình truyền đạt kiến thức các học phần hỗ trợ, cũng như trang bị cho tôi kỹ năng và phương pháp nghiên cứu khoa học. Những kiến thức và kỹ năng này là nền tảng quan trọng giúp tôi hoàn thành luận án.

Tôi chân thành cảm ơn quý Thầy/Cô, quý đồng nghiệp và các Anh/Chị đã tham dự seminar, đọc và đóng góp ý kiến cho nội dung luận án. Những nhận xét và góp ý quý báu ấy đã giúp tôi hoàn thiện luận án tốt hơn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng, Phòng Đào tạo, Khoa Toán – Tin và các phòng ban liên quan đã hỗ trợ tích cực trong suốt quá trình tôi học tập và nghiên cứu tại Trường.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến Ban Giám hiệu Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vĩnh Long, quý Thầy/Cô Khoa Khoa học Cơ bản và Khoa Công nghệ Thông tin cùng các đơn vị liên quan đã tạo điều kiện thuận lợi để tôi tập trung thực hiện luận án. Sự hỗ trợ của Nhà trường là yếu tố quan trọng giúp tôi hoàn thành tốt công việc nghiên cứu.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến gia đình – những người luôn đồng hành, ủng hộ và khích lệ tôi. Tình yêu thương và sự động viên của gia đình là nguồn động lực to lớn giúp tôi vượt qua mọi thử thách và hoàn thành luận án này.

Nghiên cứu sinh

Trương Thị Thúy Vân

TÓM TẮT ĐỀ TÀI BẰNG HAI NGÔN NGỮ TIẾNG VIỆT VÀ TIẾNG ANH

Tóm tắt

Luận án nghiên cứu môđun giả xạ ảnh để đặc trưng các lớp vành cổ điển và môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức. Luận án nghiên cứu vành mà mọi idêan phải là bất biến đẳng cấu, không chứa một tập vô hạn các phần tử lũy đẳng trực giao và vành mà mọi idêan phải là bất biến lũy linh. Nội dung luận án có ba chương. Trong Chương 1, chúng tôi nhắc lại những khái niệm và kiến thức cần thiết cho Chương 2 và Chương 3. Trong Chương 2, chúng tôi đặc trưng vành hoàn chỉnh phải, vành nửa hoàn chỉnh, vành nửa di truyền phải, vành di truyền phải cùng các mở rộng với phủ giả xạ ảnh và tính giả xạ ảnh của môđun. Chúng tôi cũng nghiên cứu đặc trưng vành nửa địa phương và vành Artin idêan chính thông qua môđun giả xạ ảnh. Kết quả chính của chúng tôi trong chương này là khẳng định lớp môđun giả xạ ảnh trùng với lớp môđun giả nội xạ trên vành Artin idêan chính. Trong Chương 3, chúng tôi nghiên cứu lớp a -vành phải I -hữu hạn, nghiên cứu mở rộng của lớp a -vành phải, đó là vành mà mọi idêan phải là bất biến lũy linh, gọi là $\mathbf{n}$ -vành phải. Kết quả chính của chúng tôi trong chương này là chỉ ra cấu trúc các lớp vành đó. Mỗi a -vành phải I -hữu hạn là tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn và một vành nửa hoàn chỉnh cơ sở. Chúng tôi cũng chứng minh rằng mỗi a -vành phải I -hữu hạn không phân tích được, không vành đơn và có các phần tử lũy đẳng không tầm thường là vành tựa Frobenius. Chúng tôi đưa ra cấu trúc của $\mathbf{n}$ -vành phải đó là tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn chính phương đầy đủ và một vành không chính phương phải. Chúng tôi khẳng định mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải có tính chất giản ước trong và ổn định hữu hạn. Hơn nữa, mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải chính quy không có môđun con đơn là vành chính quy mạnh. Ngoài ra, chúng tôi đã xác định đặc trưng của môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức. Với vành ma trận tam giác hình thức $K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$, trong đó R và S là các vành, M là $R-S$ -song môđun, nếu mỗi K -môđun phải (X, Y, f) là bất biến lũy linh thì Y là S -môđun phải bất biến lũy linh, tập $H = \{x \in X \mid f(x \otimes m) = 0, \forall m \in M\}$ là R -môđun phải bất biến lũy linh. Với các kết quả đạt được, nội dung luận án có ý nghĩa quan trọng trong việc nghiên cứu lý thuyết vành và môđun, góp phần làm phong phú thêm đặc trưng của một số lớp vành cổ điển. Việc khái quát hóa lớp a -vành phải đưa ra một lớp vành mới là $\mathbf{n}$ -vành phải, mở thêm một hướng nghiên cứu cho những người nghiên cứu lý thuyết vành và môđun.

Abstract

This thesis studies pseudo-projective modules to characterize classical rings and nilpotent-invariant modules over a formal triangular matrix ring. We investigate rings in which all right ideals are automorphism-invariant and do not contain an infinite set of orthogonal idempotent elements. We study rings in which every ideal is nilpotent-invariant. This thesis has three chapters. In Chapter 1, we review the concepts and background results for Chapters 2 and 3. In Chapter 2, we characterize right perfect rings, semiperfect rings, right semihereditary rings, right hereditary rings and their extensions with the pseudo-projective cover and pseudo-projectivity of modules. We present some characterizations of semilocal rings and Artinian principal ideal rings via pseudo-projective modules. The main result of this chapter shows that the class of pseudo-projective modules coincides with the class of pseudo-injective modules. In Chapter 3, we study the class of right I -finite a -rings and generalize a -rings to rings in which every right ideal is nilpotent-invariant, called right $\mathbf{n}$ -rings. The main result of this chapter is the determination of the structure of these classes of rings. Every right I -finite a -ring is a direct sum of a semisimple Artinian ring and a basic semiperfect ring. We also prove that every indecomposable non-simple right I -finite a -ring with non-trivial idempotents is a quasi Frobenius ring. We show that a right $\mathbf{n}$ -ring has a ring decomposition into the direct sum of a square-full semisimple Artinian ring and a right square-free ring. We conclude that every right $\mathbf{n}$ -ring satisfies the internal cancellation property and is stably-finite. Furthermore, every regular right $\mathbf{n}$ -ring with zero right socle is strongly regular. Besides, we also provide characterizations of nilpotent-invariant modules over formal triangular matrix rings. Let $K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ be a formal triangular matrix ring, where R and S are rings, M is an R - S -bimodule. If (X, Y, f) is a nilpotent-invariant right K -module then Y is a nilpotent-invariant right S -module and $H = \{x \in X \mid f(x \otimes m) = 0, \forall m \in M\}$ is a nilpotent-invariant right R -module. From the obtained results, this thesis plays an important role in the study of ring and module theory and contributes to enriching the characterizations of classical rings. Generalizations of right a -rings have led to a new class, called right $\mathbf{n}$ -rings, opening up another research direction for ring and module theory researchers.

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

Ký hiệu	Nghĩa của ký hiệu
$E(M)$	Bao nội xạ của môđun M
$\text{End}(M)$	Vành các tự đồng cấu của môđun M
$\text{Hom}_R(M, N)$	Tập các đồng cấu từ R -môđun M đến R -môđun N
$\text{Im}(f)$	Ảnh của đồng cấu f
$\text{Ker}(f)$	Nhân của đồng cấu f
M_R	M là R -môđun phải
$\bigoplus_{i \in I} M_i$	Tổng trực tiếp của họ các môđun M_i
$\prod_{i \in I} M_i$	Tích trực tiếp của họ các môđun M_i
$M^{(I)}$	Tổng trực tiếp I bản sao của môđun M
M^I	Tích trực tiếp I bản sao của môđun M
$\mathbb{M}_n(R)$	Vành các ma trận vuông cấp n với hệ tử trên vành R
$N \leq M$	N là môđun con của M
$N \leq^e M$	N là môđun con cốt yếu của M
$N \ll M$	N là môđun con đối cốt yếu của M
$N \leq^\oplus M$	N là hạng tử trực tiếp của M
$N \cong M$	N đẳng cấu với M
$\text{Rad}(M)$ ($J(R)$)	Căn Jacobson của môđun M (Căn Jacobson của vành R)
$\text{Soc}(R_R)$ ($\text{Soc}({}_R R)$)	Đế phải (trái) của vành R
$r_R(X)$ ($l_R(X)$)	Linh hóa tử phải (trái) của X trong R

DANH MỤC CÁC THUẬT NGỮ

Thuật ngữ tiếng Việt

đối sinh hữu hạn
 hữu hạn trực tiếp
 hữu hạn sinh
 miền ổn định một
 môđun bất biến đẳng cấu
 môđun bất biến lũy linh
 môđun chính phương
 môđun chính phương đầy đủ
 môđun chuỗi
 môđun con cốt yếu
 môđun con đối cốt yếu
 môđun giả nội xạ
 môđun giả xạ ảnh
 môđun không chính phương
 môđun nội xạ
 môđun nửa nguyên thủy
 môđun phẳng
 môđun tựa nội xạ
 môđun tựa xạ ảnh
 môđun xạ ảnh
 môđun xoắn
 ổn định hữu hạn
 thành phần thuần nhất
 tính chất giản ước
 tính chất giản ước trong
 tính chất thế
 tính chất trao đổi
 vành Artin nửa đơn
 vành Artin idêan chính
 vành chuỗi tổng quát
 vành di truyền
 vành hoàn chỉnh
 vành nửa di truyền
 vành nửa địa phương
 vành nửa hoàn chỉnh

Thuật ngữ tiếng Anh

finitely cogenerated
 directly-finite
 finitely generated
 stable range 1
 automorphism-invariant module
 nilpotent-invariant module
 square module
 square-full module
 uniserial module
 essential submodule
 small submodule
 pseudo-injective module
 pseudo-projective module
 square-free module
 injective module
 semiprimitive module
 flat module
 quasi-injective module
 quasi-projective module
 projective module
 torsionless module
 stably-finite
 homogeneous component
 cancellation property
 internal cancellation property
 substitution property
 exchange property
 semisimple artinian ring
 Artinian principal ideal ring
 generalized uniserial ring
 hereditary ring
 perfect ring
 semihereditary ring
 semilocal ring
 semiperfect ring

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Khái niệm môđun nội xạ được Baer [4] giới thiệu đầu tiên vào năm 1940. Một môđun M được gọi là nội xạ nếu mọi đồng cấu từ môđun con A của môđun N đến M mở rộng được đến đồng cấu từ N vào M . Đối ngẫu với khái niệm nội xạ là xạ ảnh, được Cartan và Eilenberg [8] đưa ra vào năm 1956. Một môđun M được gọi là xạ ảnh nếu với mọi môđun A , với mỗi môđun con X của A , mọi đồng cấu $\varphi : M \rightarrow A/X$ có thể nâng đến đồng cấu $\phi : M \rightarrow A$. Lớp môđun nội xạ cùng với lớp môđun đối ngẫu của nó đã có nhiều ứng dụng trong nghiên cứu lý thuyết vành. Chẳng hạn như Faith và Walker [14] đã đặc trưng các vành tựa Frobenius thông qua lớp môđun nội xạ và xạ ảnh; Colby và Rutter [11] đã dùng môđun xạ ảnh để đặc trưng các vành nửa di truyền và di truyền.

Những năm sau đó, khái niệm môđun nội xạ và các mở rộng đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả trong và ngoài nước. Một trong các mở rộng quan trọng của lớp môđun nội xạ là lớp môđun tựa nội xạ. Lớp môđun này được Johnson và Wong [24] giới thiệu vào năm 1961, đó là lớp môđun bất biến qua các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó. Đối ngẫu với khái niệm tựa nội xạ là tựa xạ ảnh. Khái niệm này đã được Wu và Jans [51] phát biểu vào năm 1967. Một môđun M được gọi là tựa xạ ảnh nếu với mỗi môđun con X của M , mọi đồng cấu $f : M \rightarrow M/X$ có thể nâng đến tự đồng cấu của M . Nhiều tác giả cũng đã đặc trưng một số lớp vành cổ điển thông qua các lớp môđun này. Cụ thể, các kết quả của Golan [16] đặc trưng vành Artin nửa đơn, vành nửa hoàn chỉnh, vành hoàn chỉnh, vành nửa di truyền, vành di truyền, PP -vành thông qua các môđun tựa xạ ảnh. Fuller cũng đã xác định đặc trưng của vành chuỗi tổng quát trong [15], đó là lớp vành mà mỗi môđun không phân tích được là tựa nội xạ hay mỗi môđun không phân tích được là tựa xạ ảnh.

Năm 1967, Singh và Jain [43] đã đưa ra khái niệm môđun giả nội xạ, đó là mở rộng của lớp môđun tựa nội xạ. Một môđun M được gọi là giả nội xạ nếu với mọi môđun con N của M , mỗi đơn cấu từ N vào M mở rộng đến tự đồng cấu của M . Năm 1969, Dickson và Fuller [12] đã nghiên cứu lớp môđun không phân tích được tựa nội xạ. Các tác giả này chỉ ra rằng các môđun không phân tích được trên một đại số K là tựa nội xạ nếu và chỉ nếu nó bất biến qua các tự đẳng cấu của bao nội xạ của nó. Xuất phát từ kết quả này, Lee và Zhou [32] đưa ra khái niệm môđun bất biến đẳng cấu vào năm 2013. Một môđun là bất biến đẳng cấu nếu môđun đó bất biến qua các tự đẳng cấu của bao nội xạ. Sau đó, Er, Singh và Srivastava [13] đã chỉ ra rằng lớp môđun bất biến đẳng cấu và lớp môđun giả nội xạ là trùng

nhau. Đối ngẫu với khái niệm giả nội xạ là giả xạ ảnh. Khái niệm này cũng đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu lý thuyết vành. Trong [46], một môđun M được gọi là giả xạ ảnh nếu với mọi môđun A và các toàn cấu $f, g : M \rightarrow A$ thì luôn tồn tại tự đồng cấu h của M sao cho $f = g \circ h$. Tiwary và Pandeya [46] đã sử dụng tính chất giả xạ ảnh để đặc trưng vành Artin nửa đơn và vành hoàn chỉnh phải. Năm 2024, Trang và Dung [47] đã nghiên cứu môđun giả xạ ảnh để đặc trưng vành Artin nửa đơn và vành ma trận tam giác hình thức. Tuy nhiên, nghiên cứu về đặc trưng các lớp vành cổ điển như vành di truyền, nửa địa phương hoặc Artin idêan chính thông qua lớp môđun giả xạ ảnh vẫn còn hạn chế. Xuất phát từ điều này, luận án tập trung nghiên cứu tính chất giả xạ ảnh của môđun nhằm đặc trưng một số lớp vành cổ điển.

Tiếp tục nghiên cứu mở rộng của môđun bất biến đẳng cấu, Koşan và Quynh [26] đã giới thiệu môđun bất biến lũy linh vào năm 2017. Một môđun M được gọi là bất biến lũy linh nếu M bất biến qua các tự đồng cấu lũy linh của bao nội xạ. Lớp môđun bất biến đẳng cấu và lớp môđun bất biến lũy linh cũng có những tính chất tương tự: cùng thỏa mãn điều kiện (C3); tổng trực tiếp của hai bản sao là bất biến lũy linh hoặc bất biến đẳng cấu khi và chỉ khi môđun đó là tựa nội xạ. Tuy nhiên, một số tính chất của lớp môđun bất biến lũy linh không còn tương tự khi xem xét cho lớp môđun bất biến đẳng cấu. Chẳng hạn, vành tự đồng cấu của các môđun bất biến đẳng cấu là nửa chính quy và căn Jacobson của vành trùng với idêan phải suy biến; một môđun bất biến đẳng cấu là môđun clean; những tính chất này không còn đúng với lớp môđun bất biến lũy linh. Như vậy, lớp môđun bất biến lũy linh là mở rộng thật sự của lớp môđun bất biến đẳng cấu. Năm 2021, Quynh, Abyzov và Tai [37] đã mở rộng các tính chất và đối ngẫu khái niệm trên. Trong luận án này, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu về môđun bất biến lũy linh, cụ thể là nghiên cứu trên vành ma trận tam giác hình thức.

Cách tiếp cận nghiên cứu các vành thông qua idêan cũng đã thu hút sự quan tâm của nhiều tác giả. Năm 1969, Jain, Mohamed và Singh [22] đã nghiên cứu cấu trúc vành thông qua tính tựa nội xạ của lớp idêan một phía. Các tác giả này đã định nghĩa lớp vành mà mỗi idêan phải tựa nội xạ là q -vành phải, từ đó đặc trưng được vành Artin nửa đơn. Năm 2014, khi nghiên cứu về vành mà các môđun bất biến đẳng cấu, Singh và Srivastava [44] đã giới thiệu a -vành phải, đó là vành mà mỗi idêan phải là bất biến đẳng cấu. Các tác giả đã đặt ra vấn đề mô tả cấu trúc của mỗi a -vành phải. Vấn đề này được Koşan, Quynh và Srivastava làm sáng tỏ trong [27] vào năm 2016. Theo đó, mỗi a -vành phải được phân tích thành tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn chính phương đầy đủ và một vành không chính phương phải. Bên cạnh đó, các tác giả cũng thu được nhiều kết quả khác về lớp vành này, như đặc trưng của a -vành phải thông qua các idêan phải cốt yếu

bất biến đẳng cấu, mối liên hệ giữa a -vành phải và vành Artin nửa đơn,... Một cách tự nhiên, chúng tôi đặt ra vấn đề nghiên cứu lớp vành mà mọi idêan phải là bất biến lũy linh, chúng tôi gọi là n -vành phải. Mối quan hệ giữa các lớp vành mà chúng tôi đã trình bày theo hướng tiếp cận thông qua lớp idêan một phía của vành được mô tả trong sơ đồ sau:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{tựa nội xạ} & \longrightarrow & \text{bất biến đẳng cấu} & \longrightarrow & \text{bất biến lũy linh} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 q\text{-vành} & \longrightarrow & a\text{-vành} & \longrightarrow & n\text{-vành}
 \end{array}$$

Tiếp tục nghiên cứu lớp q -vành, Hill [20] chứng minh rằng mỗi q -vành phải nửa hoàn chỉnh là tổng trực tiếp của một vành cơ sở và một vành Artin nửa đơn. Lớp a -vành cũng được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu và mở rộng. Năm 2022, Quynh, Abyzov và Trang [38] đã nghiên cứu lớp vành mà mỗi idêan phải hữu hạn sinh là bất biến đẳng cấu và gọi đó là fa -vành phải. Các tác giả đã xác định cấu trúc của fa -vành phải dưới dạng vành ma trận tam giác hình thức.

Từ tính chất của vành bất biến đẳng cấu, mọi phần tử lũy đẳng nguyên thủy là lũy đẳng địa phương, ta có một vành không chứa tập vô hạn các lũy đẳng trực giao bất biến đẳng cấu phải là vành nửa hoàn chỉnh. Tuy nhiên, tính chất idêan bất biến đẳng cấu trong lớp a -vành phải nửa hoàn chỉnh, đặc biệt với điều kiện I -hữu hạn vẫn chưa được nghiên cứu đầy đủ. Từ điều này dẫn đến có thể nghiên cứu lớp a -vành phải I -hữu hạn thông qua vành nửa hoàn chỉnh cơ sở. Đây cũng chính là vấn đề nghiên cứu của chúng tôi cho lớp a -vành phải nửa hoàn chỉnh.

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu cấu trúc các vành thông qua tính giả xạ ảnh của các môđun và cấu trúc vành ma trận tam giác hình thức với điều kiện bất biến lũy linh của các môđun. Bên cạnh đó, một số đặc trưng của các lớp vành thông qua tính bất biến đẳng cấu, bất biến lũy linh của các idêan một phía đã được nghiên cứu và phát triển.

Từ những kết quả đã đạt được về lớp môđun giả xạ ảnh, lớp môđun bất biến đẳng cấu và lớp môđun bất biến lũy linh, chúng tôi nhận thấy rằng để nghiên cứu môđun giả xạ ảnh đặc trưng các vành, nghiên cứu môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức, nghiên cứu vành mà mỗi idêan bất biến đẳng cấu và vành mà mỗi idêan bất biến lũy linh thì cần phải tìm hiểu lớp môđun nội xạ cùng các mở rộng, cũng như lớp môđun đối ngẫu của nó. Từ đó, chúng tôi chọn đề tài luận án là **“Tính nội xạ, xạ ảnh của môđun và một số lớp vành liên quan”**.

2. Mục đích nghiên cứu

- Xác định đặc trưng của các vành cổ điển (như vành hoàn chỉnh, nửa hoàn chỉnh, di truyền, nửa di truyền, nửa địa phương, Artin idêan chính) thông qua môđun giả xạ ảnh.
- Phân tích cấu trúc, đặc trưng của a -vành phải I -hữu hạn có để cốt yếu.
- Nghiên cứu tính chất của vành mà mọi idêan phải bất biến lũy linh và môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án bao gồm:

- Các lớp môđun như giả xạ ảnh, bất biến đẳng cấu, bất biến lũy linh.
- Các lớp vành cổ điển như hoàn chỉnh phải, nửa hoàn chỉnh, di truyền phải, nửa di truyền phải, nửa địa phương, Artin idêan chính; cùng với các lớp vành mà trong đó mọi idêan phải là bất biến đẳng cấu hoặc bất biến lũy linh và vành ma trận tam giác hình thức.

Phạm vi nghiên cứu được giới hạn trong phạm trù các môđun phải (trái), với R là một vành kết hợp, có đơn vị, thuộc các lớp vành cổ điển, lớp a -vành, lớp n -vành, vành ma trận tam giác hình thức. Ngoài ra, luận án cũng nghiên cứu các lớp môđun: giả xạ ảnh, bất biến đẳng cấu, bất biến lũy linh.

4. Phương pháp nghiên cứu

Đề tài nghiên cứu thuộc lĩnh vực khoa học cơ bản ngành toán học. Trước hết, chúng tôi đọc các tài liệu chuyên môn cùng với các bài báo liên quan đến môđun giả xạ ảnh, môđun bất biến đẳng cấu, môđun bất biến lũy linh cũng như các lớp vành cổ điển, lớp a -vành. Sau đó, chúng tôi phân tích, xử lý tài liệu, trao đổi ý kiến với giảng viên hướng dẫn và các chuyên gia để khai thác, mở rộng vấn đề cần nghiên cứu thông qua các hội thảo, seminar. Chúng tôi sử dụng các phương pháp khái quát hóa, so sánh, suy luận logic, phân loại để đề xuất những vấn đề nghiên cứu của đề tài.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Đề tài đã đưa ra đặc trưng một số lớp vành cổ điển thông qua tính giả xạ ảnh của môđun; tiếp tục nghiên cứu và mở rộng lớp a -vành phải thông qua điều kiện I -hữu hạn, đưa ra lớp vành mới là n -vành phải. Các kết quả về tính chất, đặc trưng, cấu trúc cũng như mối quan hệ giữa n -vành phải và các lớp vành khác đã bổ sung thêm các kiến thức về lý thuyết vành. Với các kết quả đạt được, có thể thấy rằng, việc nghiên cứu đề tài có ý nghĩa quan trọng trong nghiên cứu lý thuyết vành và môđun, làm phong phú thêm đặc trưng các lớp vành cổ điển, góp

phần tạo động lực thúc đẩy những người nghiên cứu quan tâm đến lý thuyết vành và môđun.

6. Cấu trúc của luận án

Nội dung của luận án gồm 3 chương.

Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết vành và môđun, gồm các kiến thức đã biết để sử dụng trong các chương sau.

Chương 2 gồm ba phần: môđun giả xạ ảnh trên vành nửa hoàn chỉnh, vành hoàn chỉnh; môđun giả xạ ảnh trên vành nửa di truyền, vành di truyền; môđun giả xạ ảnh trên vành nửa địa phương và vành Artin idêan chính.

Trong phần thứ nhất, chúng tôi chỉ ra đặc trưng của lớp vành hoàn chỉnh phải, nửa hoàn chỉnh thông qua tính giả xạ ảnh và phủ giả xạ ảnh của môđun. Trước tiên, chúng tôi chỉ ra đặc trưng của lớp vành Artin nửa đơn thông qua khái niệm giả nội xạ. Theo đó, vành R là Artin nửa đơn khi và chỉ khi mỗi R -môđun hữu hạn sinh là giả nội xạ (Mệnh đề 2.1.1). Nếu cho f là toàn cấu từ môđun xạ ảnh P vào môđun M thì M là xạ ảnh khi và chỉ khi $P \oplus M$ là giả xạ ảnh, M có phủ xạ ảnh nếu và chỉ nếu $P \oplus M$ có phủ giả xạ ảnh (Mệnh đề 2.1.2). Sử dụng kết quả mệnh đề này, chúng tôi chứng minh nhiều đặc trưng vành thông qua tính giả xạ ảnh của môđun. Trong Định lý 2.1.5, vành R là hoàn chỉnh phải khi và chỉ khi tổng trực tiếp của một R -môđun nửa đơn và một R -môđun tự do có phủ giả xạ ảnh. Ngoài ra, một vành là S -vành phải khi và chỉ khi mỗi môđun hữu hạn sinh phẳng là giả xạ ảnh (Định lý 2.1.6). Về PP -vành phải, điều kiện cần và đủ để một vành là PP -vành phải đó là mỗi idêan phải chính của vành ma trận $M_2(R)$ được sinh bởi ma trận chéo là $M_2(R)$ -môđun phải giả xạ ảnh (Định lý 2.1.7). Hơn nữa, nếu R vừa là vành coherent trái, vừa là vành hoàn chỉnh phải thì mọi tích trực tiếp của họ các R -môđun phải xạ ảnh (phẳng) là giả xạ ảnh (Định lý 2.1.9).

Trong phần thứ hai, chúng tôi đặc trưng vành nửa di truyền phải, vành di truyền phải với tính giả xạ ảnh của môđun. Cụ thể, vành R là nửa di truyền phải nếu và chỉ nếu mỗi môđun con hữu hạn sinh của một R -môđun xạ ảnh là giả xạ ảnh; điều này cũng tương đương với mỗi idêan phải chính của $S = \text{End}(F)$ là S -môđun giả xạ ảnh, trong đó F là môđun hữu hạn sinh tự do (Định lý 2.2.1). Từ đặc trưng của S -vành phải và đặc trưng của vành nửa di truyền phải, chúng tôi khẳng định rằng mỗi vành R là nửa di truyền phải và S -vành phải cũng là vành nửa di truyền trái và S -vành trái. Trên lớp vành này, mỗi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun phải (trái) phẳng là giả xạ ảnh (Định lý 2.2.3). Ngoài ra, trên vành nửa di truyền và Π -coherent, mỗi R -môđun phải (trái) hữu hạn sinh xoắn là giả xạ ảnh (Định lý 2.2.5). Đối với vành di truyền phải, chúng tôi có mỗi môđun con của môđun xạ ảnh là giả xạ ảnh (Định lý 2.2.6). Khi R là vành di truyền và nửa

nguyên sơ, mỗi R -môđun con của môđun phải (trái) phẳng là giả xạ ảnh (Định lý 2.2.7). Hơn nữa, trên lớp vành này, mỗi R -môđun phải (trái) xoắn cũng là giả xạ ảnh (Định lý 2.2.8).

Trong phần thứ ba, chúng tôi nghiên cứu đặc trưng của vành nửa địa phương và vành Artin idêan chính thông qua môđun giả xạ ảnh. Chúng tôi chỉ ra rằng một vành là nửa địa phương khi và chỉ khi mỗi môđun hữu hạn sinh với căn Jacobson bằng không là giả xạ ảnh (Định lý 2.3.2). Chúng tôi cũng xác định cấu trúc của vành Artin idêan chính. Theo đó, một vành là Artin idêan chính khi và chỉ khi lớp môđun giả nội xạ trùng với lớp môđun giả xạ ảnh (Định lý 2.3.3).

Chương 3 gồm hai phần: lớp a -vành phải và vành mà mỗi idêan phải bất biến lũy linh.

Trong phần thứ nhất, chúng tôi nghiên cứu cấu trúc của lớp a -vành phải với điều kiện I -hữu hạn, mối quan hệ của lớp a -vành phải với một số lớp vành. Chúng tôi chỉ ra rằng mỗi a -vành phải I -hữu hạn là tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn và một vành nửa hoàn chỉnh cơ sở (Định lý 3.1.4). Sử dụng kết quả này, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu các vành không phân tích được a -vành phải thông qua điều kiện Nakayama. Từ điều này, chúng tôi chứng minh được mỗi a -vành phải nửa hoàn chỉnh có để cốt yếu không phân tích được, không vành đơn và có các phần tử lũy đẳng không tầm thường là vành tựa Frobenius (Định lý 3.1.13). Kết quả này chỉ ra lớp môđun nội xạ và xạ ảnh trùng nhau.

Trong phần thứ hai, chúng tôi nghiên cứu mở rộng lớp a -vành phải và đưa ra khái niệm n -vành phải. Một vành được gọi là n -vành phải nếu mọi idêan phải của vành là bất biến lũy linh. Chúng tôi khảo sát các tính chất và sự phân tích của n -vành phải. Ngoài ra, môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức cũng được xem xét trong phần này. Trong Mệnh đề 3.2.4, chúng tôi chỉ ra đặc trưng của n -vành phải. Theo đó, vành R là n -vành phải khi và chỉ khi mỗi idêan phải cốt yếu của R là bất biến lũy linh. Điều này cũng tương đương với R là bất biến lũy linh phải và mỗi idêan phải cốt yếu của R là T -môđun trái, trong đó T là vành con của R có tập sinh gồm phần tử đơn vị và các phần tử lũy linh của R mà các phần tử lũy linh này mở rộng được đến tự đồng cấu lũy linh của $E(R_R)$. Về thành phần thuần nhất của n -vành phải, mỗi n -vành phải có hữu hạn thành phần thuần nhất không đơn và mỗi thành phần thuần nhất không đơn này là nội xạ và có tập chỉ số hữu hạn (Định lý 3.2.8). Kết quả về sự phân tích của n -vành phải thành tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn chính phương đầy đủ và một vành không chính phương phải được đề cập đến trong Định lý 3.2.13. Ngoài ra, chúng tôi chỉ ra rằng mỗi n -vành phải có tính chất giản ước trong (Định lý 3.2.15). Bằng việc chứng minh mỗi phần tử lũy đẳng trong n -vành phải chính quy

R có $\text{Soc}(R_R) = 0$ là phần tử lũy đẳng tâm thì chúng tôi nhận được điều kiện đủ để một vành chính quy trở thành vành chính quy mạnh (Định lý 3.2.20). Bên cạnh đó, mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải ổn định hữu hạn (Định lý 3.2.26). Về đặc trưng của $\mathbf{n}$ -vành phải nguyên tố có để phải khác không, R là $\mathbf{n}$ -vành phải nguyên tố khi và chỉ khi R là Artin đơn (Mệnh đề 3.2.22). Về tính bất biến lũy linh của vành ma trận được trình bày trong Định lý 3.2.23, R là Artin nửa đơn khi và chỉ khi vành ma trận $\mathbb{M}_n(R)$ là $\mathbf{n}$ -vành phải với mọi số nguyên $n > 1$. Nghiên cứu môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức, chúng tôi chỉ ra rằng, nếu (X, Y, f) là môđun bất biến lũy linh trên vành Artin trái $K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ thì Y là S -môđun bất biến lũy linh và $H = \{x \in X \mid f(x \otimes m) = 0, \forall m \in M\}$ là R -môđun bất biến lũy linh (Định lý 3.2.27). Đặc biệt, trong Mệnh đề 3.2.30, chúng tôi đã xác định điều kiện đủ để K -môđun (X, Y, f) bất biến lũy linh, đó là: Y là S -môđun bất biến lũy linh, $\tilde{f} : X \rightarrow \text{Hom}_S(M, Y)$ với $\tilde{f}(x)(m) = f(x \otimes m)$, $x \in X$, $m \in M$ là đẳng cấu của các R -môđun và tập $\{x \in X \mid f(x \otimes m) = 0, \forall m \in M\} = 0$.

CHƯƠNG 1.

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại các ký hiệu, khái niệm và một số tính chất cơ bản được sử dụng trong luận án. Những khái niệm và kết quả khác có liên quan đến luận án có thể tham khảo trong các tài liệu [1], [3], [5], [10], [25], [28], [33], [34].

1.1. Một số ký hiệu và khái niệm liên quan

Trong luận án này, nếu không giải thích gì thêm, vành R được giả thiết là vành kết hợp có đơn vị $1 \neq 0$ và mọi R -môđun được xét là môđun unita phải hoặc trái.

Với vành R cho trước, chúng tôi ký hiệu M_R (${}_R M$) để chỉ M là R -môđun phải (tương ứng, trái). Khi đề cập đến R -môđun M , chúng tôi quy ước đó là R -môđun phải và viết M thay vì M_R . Nếu N là môđun con của M thì chúng tôi dùng ký hiệu $N \leq M$. Để ký hiệu N là một hạng tử trực tiếp của M , chúng tôi viết là $N \leq^\oplus M$. Vành các ma trận vuông cấp n với hệ tử trên vành R được ký hiệu là $\mathbb{M}_n(R)$. Với tập hợp I có $\text{card}(I) = \alpha$ và M là R -môđun, tổng trực tiếp α bản sao của M được ký hiệu là $M^{(I)}$ hoặc $M^{(\alpha)}$; tích trực tiếp α bản sao của M được ký hiệu là M^I hoặc M^α . Với M, N là các R -môđun, đồng cấu từ M đến N được hiểu là đồng cấu R -môđun; tập hợp các R -đồng cấu môđun từ M đến N được ký hiệu là $\text{Hom}_R(M, N)$. Để chỉ tập các tự đồng cấu của R -môđun M ta dùng ký hiệu $\text{End}_R(M)$, hoặc đơn giản là $\text{End}(M)$. Căn Jacobson, đế của môđun M được ký hiệu tương ứng là $\text{Rad}(M)$ và $\text{Soc}(M)$, đặc biệt, $J(R)$ được dùng để ký hiệu cho căn Jacobson của vành R ; $\text{Soc}(R_R)$, $\text{Soc}({}_R R)$ tương ứng ký hiệu cho đế phải và đế trái của vành R .

Một đơn cấu $\alpha : A \rightarrow B$ được gọi là *chẻ ra* nếu $\text{Im}(\alpha) \leq^\oplus B$. Một toàn cấu $\beta : B \rightarrow C$ được gọi là *chẻ ra* nếu $\text{Ker}(\beta) \leq^\oplus B$ [25, Definition 3.4.8].

Cho M là một R -môđun phải và tập $\emptyset \neq X \subseteq M$. Linh hóa tử phải của X trong R được ký hiệu là $r_R(X)$ và được xác định:

$$r_R(X) = \{r \in R \mid xr = 0, x \in X\}.$$

Khi $X = \{x\}$, ta viết $r_R(x)$. Ta có $r_R(X)$ là một idêan phải của vành R . Hơn nữa, nếu X là môđun con của M thì $r_R(X)$ là một idêan của R . Linh hóa tử trái của X trong R được ký hiệu là $l_R(X)$ và được định nghĩa tương tự [1, tr. 172-173].

Môđun con K của M được gọi là *cốt yếu* (hay *lớn*) trong M , ký hiệu $K \leq^e M$, nếu với mọi môđun con $L \leq M$ thỏa mãn $K \cap L = 0$ thì $L = 0$. Khi đó, M được gọi là *mở rộng cốt yếu* của K . Một đơn cấu $\alpha : M \rightarrow Q$ được gọi là *đơn cấu cốt yếu* nếu $\text{Im}(\alpha) \leq^e Q$. Đối ngẫu với khái niệm cốt yếu, môđun con K của M được gọi là *đối cốt yếu* (hay *bé*) trong M , ký hiệu $K \ll M$, nếu với mọi môđun con $L \leq M$ sao cho $K + L = M$ thì $L = M$. Một toàn cấu $\alpha : M \rightarrow Q$ được gọi là *toàn cấu đối cốt yếu* nếu $\text{Ker}(\alpha) \ll M$ [25, Definition 5.1.1].

Môđun con N của M được gọi là *đóng trong* M nếu không tồn tại mở rộng cốt yếu thực sự của N trong M . Mở rộng cốt yếu cực đại của N trong M được gọi là *bao đóng* của N trong M [34, pp. 14-15].

Môđun M được gọi là *đều* nếu với mọi môđun con khác không A, B của M , ta có $A \cap B \neq 0$ [34, pp. 103].

Môđun con C được gọi là *phần bù* của môđun con K trong M nếu C là môđun con cực đại của M sao cho $C \cap K = 0$. Môđun con C của M được gọi là *phần bù* trong M nếu tồn tại môđun con K của M sao cho C là phần bù của K [33, pp. 19]. Chúng ta biết, một môđun con N của M là đóng trong M nếu và chỉ nếu N là phần bù.

Hai môđun M và N được gọi là *trực giao* nếu không tồn tại môđun con khác không của M đẳng cấu với môđun con của N [33, pp. 13]. Môđun M được gọi là *chính phương* nếu tồn tại môđun N sao cho $M \cong N^2$. Môđun con N của M được gọi là *nghiệm chính phương* nếu N^2 có thể nhúng vào M . Môđun M được gọi là *không chính phương* nếu M không chứa tổng trực tiếp của hai môđun con khác không đẳng cấu. Môđun M được gọi là *chính phương đầy đủ* nếu mọi môđun con khác không của M chứa nghiệm chính phương khác không [33, Definition 2.34].

Môđun P được gọi là *hữu hạn liên kết* nếu tồn tại dãy khớp

$$0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow 0,$$

trong đó F là môđun tự do và K là môđun hữu hạn sinh. Nếu F có hạng hữu hạn thì P được gọi là *hữu hạn biểu diễn được* [30, Definition 4.25].

Môđun P là hữu hạn biểu diễn được nếu và chỉ nếu P là hữu hạn sinh và hữu hạn liên kết [30, Proposition 4.26].

Môđun M được gọi là *nửa nguyên thủy* nếu $\text{Rad}(M) = 0$ [21, pp. 107]. Đặc trưng của môđun Artin nửa nguyên thủy được trình bày trong [3].

Bổ đề 1.1.1 ([3, Proposition 10.15]). *Cho M là R -môđun. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

- (1) *Môđun M là Artin nửa nguyên thủy.*

(2) Môđun M là đối sinh hữu hạn nửa nguyên thủy

(3) Môđun M là hữu hạn sinh nửa đơn.

Môđun M được gọi là có tính chất giản ước nếu từ $M \oplus X \cong M \oplus Y$ suy ra $X \cong Y$. Môđun M được gọi là có tính chất giản ước trong nếu từ $M = A_1 \oplus B_1 = A_2 \oplus B_2$, với $A_1 \cong A_2$ suy ra $B_1 \cong B_2$ [33, Definition 1.22]. Môđun M được gọi là có tính chất thế nếu với mọi môđun N thỏa mãn $N = M_1 \oplus A = M_2 \oplus B$, trong đó $M_1 \cong M \cong M_2$ thì tồn tại môđun con C của N sao cho $N = C \oplus A = C \oplus B$ [10, 15.5]. Môđun M được gọi là có tính chất trao đổi nếu với mỗi R -môđun A có phân tích $A = M' \oplus N = \bigoplus_{\mathcal{I}} A_i$, trong đó $M' \cong M$ thì tồn tại các môđun con B_i của A_i sao cho $A = M' \oplus (\bigoplus_{\mathcal{I}} B_i)$. Nếu tập chỉ số $\mathcal{I}$ hữu hạn thì ta nói M có tính chất trao đổi hữu hạn. Đặc biệt, với mọi môđun hữu hạn sinh M , hai tính chất này là tương đương, nghĩa là M có tính chất trao đổi khi và chỉ khi nó có tính chất trao đổi hữu hạn [33, Definition 1.20].

Vành R được gọi là có miền ổn định một nếu với mọi $x, y \in R$ sao cho $xR + yR = R$ thì tồn tại $z \in R$ sao cho $x + yz$ là phần tử khả nghịch của R [10, 15.2]. Đặc trưng của vành tự đồng cấu có miền ổn định một được trình bày trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.1.2 ([10, 15.37]). *Cho M là môđun có tính chất trao đổi hữu hạn. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:*

(1) $\text{End}(M)$ có miền ổn định một.

(2) Môđun M có tính chất thế.

(3) Môđun M có tính chất giản ước.

(4) Môđun M có tính chất giản ước trong.

Môđun M được gọi là hữu hạn trực tiếp nếu M không đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp thật sự của M [33, Definition 1.24]. Từ [33, Proposition 1.25], chúng ta kết luận: Vành R được gọi là hữu hạn trực tiếp nếu từ $xy = 1$ suy ra $yx = 1$ với mọi $x, y \in R$. Mọi vành Artin nửa đơn là vành hữu hạn trực tiếp.

Vành R được gọi là ổn định hữu hạn nếu vành ma trận $\mathbb{M}_n(R)$ là hữu hạn trực tiếp [30, pp. 5].

1.2. Các mở rộng của môđun nội xạ và xạ ảnh

Phần này trình bày các kết quả về môđun nội xạ, xạ ảnh và các mở rộng của chúng, chú trọng những tính chất được sử dụng trong luận án.

Môđun M được gọi là N -*nội xạ* nếu với mọi môđun con A của N thì mọi đồng cấu $f : A \rightarrow M$ mở rộng đến đồng cấu $\bar{f} : N \rightarrow M$, nghĩa là biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & N \\ & & \downarrow f & \swarrow \bar{f} & \\ & & M & & \end{array}$$

Môđun M được gọi là *nội xạ* nếu nó là N -nội xạ với mọi môđun N . Đặc biệt, nếu M là M -nội xạ thì ta nói M là *tựa nội xạ*. Ngoài ra, Baer đã đưa ra một tiêu chuẩn để nhận biết tính nội xạ của môđun, thường gọi là “Tiêu chuẩn Baer”. Theo đó, môđun M là nội xạ khi và chỉ khi M là R_R -nội xạ [34, pp. 6, 8]. Hai môđun M và N được gọi là *nội xạ lẫn nhau* nếu M là N -nội xạ và N là M -nội xạ [33, Corollary 1.16]

Môđun M được gọi là *giả nội xạ* nếu với mọi môđun con N của M , mọi đơn cấu $f : N \rightarrow M$ mở rộng đến tự đồng cấu của M [43, pp. 23].

Với môđun M , một đơn cấu $\alpha : M \rightarrow Q$ được gọi là *bao nội xạ* của M nếu Q là môđun nội xạ và α là đơn cấu cốt yếu. Khi đó, Q thường được gọi là bao nội xạ của M và ký hiệu là $E(M)$ [34, pp. 6].

Môđun M được gọi là *bất biến đẳng cấu* nếu $f(M) \leq M$ với mọi tự đẳng cấu f của bao nội xạ $E(M)$ [32, Definition 1]. Một vành R được gọi là *bất biến đẳng cấu phải* nếu R_R là môđun bất biến đẳng cấu [40, pp. 3].

Một tự đồng cấu $f : E(M) \rightarrow E(M)$ được gọi là *lũy linh* nếu tồn tại số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho $f^n = 0$. Môđun M được gọi là *bất biến lũy linh* nếu với mọi tự đồng cấu lũy linh f của bao nội xạ $E(M)$, ta có $f(M) \leq M$. Một vành R được gọi là *bất biến lũy linh phải* nếu R_R là môđun bất biến lũy linh [26, pp. 2776].

Các khái niệm nêu trên có mối quan hệ như sau:

$$\text{nội xạ} \Rightarrow \text{tựa nội xạ} \Rightarrow \text{giả nội xạ} \equiv \text{bất biến đẳng cấu} \Rightarrow \text{bất biến lũy linh}.$$

Các tính chất của môđun nội xạ và các mở rộng đã được nghiên cứu trong nhiều tài liệu. Sau đây, chúng tôi trình bày một số kết quả của chúng được tổng hợp từ các tài liệu [3] và [34].

Mệnh đề 1.2.1 ([3, Proposition 18.12], [34, Corollary 1.6, Lemma 1.14]). *Cho R -môđun M . Khi đó,*

- (1) *Môđun M là nội xạ khi và chỉ khi mọi đơn cấu $f : M \rightarrow N$ chẻ ra.*
- (2) *Môđun M là N -nội xạ nếu và chỉ nếu $\lambda(N) \leq M$ với mọi đồng cấu $\lambda : E(N) \rightarrow E(M)$.*

(3) Môđun M là nội xạ khi và chỉ khi $M = E(M)$.

(4) Nếu $M \leq^e N$ thì $E(M) = E(N)$.

Một vành R được gọi là *tựa duo phải (trái)* nếu mọi idêan phải (trái) của R là idêan hai phía [34, pp. 105]. Tính bất biến đẳng cấu của môđun có mối liên hệ chặt chẽ với cấu trúc của vành tự đồng cấu. Các kết quả sau, tổng hợp từ các tài liệu [2] và [18], mô tả mối quan hệ này.

Định lý 1.2.2 ([2, Proposition 2.2], [18, Theorem 15]). *Cho M là môđun bất biến đẳng cấu. Khi đó,*

- (1) M là không chính phương nếu và chỉ nếu vành tự đồng cấu $\text{End}(M)$ là tựa duo trái (phải).
- (2) Nếu M là môđun không phân tích được thì $\text{End}(M)$ là vành địa phương.

Dưới đây là một số kết quả về tính chất của môđun bất biến lũy linh.

Định lý 1.2.3 ([26, Proposition 2.8, Theorem 2.10, Theorem 2.12, Lemma 2.14]). *Cho M là R -môđun bất biến lũy linh. Khi đó,*

- (1) Hạng tử trực tiếp của môđun bất biến lũy linh cũng là môđun bất biến lũy linh.
- (2) Nếu $M = M_1 \oplus M_2$ thì các môđun M_1 và M_2 là nội xạ lẫn nhau.
- (3) Nếu $A \oplus B \leq^e M$ thì mọi đồng cấu từ môđun con của A vào B mở rộng đến tự đồng cấu lũy linh của M .
- (4) Nếu bao nội xạ $E(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$ với $E_1 \cong E_2$ thì

$$M = (E_1 \cap M) \oplus (E_2 \cap M) \oplus (E_3 \cap M).$$

Kết quả sau đưa ra điều kiện cần và đủ để tổng trực tiếp các môđun là tựa nội xạ.

Mệnh đề 1.2.4 ([33, Proposition 1.18]). *Cho $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ là tổng trực tiếp của một họ các môđun. Khi đó, M là tựa nội xạ khi và chỉ khi mỗi M_i là tựa nội xạ và tổng trực tiếp $\bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} M_j$ là M_i -nội xạ với mọi $i \in I$.*

Khi nghiên cứu một số mở rộng của vành tự nội xạ, tác giả Utumi [34, pp. 9-10] đã giới thiệu các điều kiện $C1$, $C2$, $C3$ đối với môđun như sau:

Điều kiện $C1$: Mọi môđun con của M là cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của M . Nói cách khác, mọi môđun con đóng của M là hạng tử trực tiếp của M .

Điều kiện C2: Nếu A và B là các môđun con của M , $A \cong B$ và A là hạng tử trực tiếp của M thì B cũng là hạng tử trực tiếp của M .

Điều kiện C3: Nếu A và B là những hạng tử trực tiếp của M và $A \cap B = 0$ thì $A \oplus B$ cũng là một hạng tử trực tiếp của M .

Môđun M được gọi là *C1* nếu M thỏa mãn điều kiện C1. Môđun C1 còn được gọi là *môđun CS* hoặc *môđun mở rộng*.

Mối quan hệ giữa tính tựa nội xạ và tính bất biến đẳng cấu trong trường hợp tổng trực tiếp của các môđun CS được mô tả trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.2.5 ([32, Corollary 15]). *Cho môđun $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, trong đó mỗi M_i là môđun CS. Khi đó, M là tựa nội xạ khi và chỉ khi M là bất biến đẳng cấu.*

Trong phần tiếp theo, chúng tôi định nghĩa môđun xạ ảnh cùng các mở rộng, đồng thời trình bày một số kết quả của chúng có liên quan đến nội dung luận án.

Môđun M được gọi là *A-xạ ảnh* nếu với mọi môđun con X của A , mọi đồng cấu $\varphi : M \rightarrow A/X$ nâng đến đồng cấu $\phi : M \rightarrow A$, nghĩa là biểu đồ sau đây giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \phi \swarrow & \downarrow \varphi & \\ A & \longrightarrow & A/X \longrightarrow 0 \end{array}$$

Môđun M được gọi là *xạ ảnh* nếu M là A -xạ ảnh với mọi môđun A . Môđun M được gọi là *tựa xạ ảnh* nếu M là M -xạ ảnh [33, Definition 4.29].

Môđun M được gọi là *giả xạ ảnh* nếu với mọi môđun A và các toàn cấu $f, g : M \rightarrow A$ thì luôn tồn tại một tự đồng cấu $h : M \rightarrow M$ sao cho $f = g \circ h$, nghĩa là biểu đồ sau giao hoán [46, Definition 1.1]

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & \nearrow h & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{g} & A & \longrightarrow & 0. \\ & & \downarrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Ta có mối quan hệ sau giữa các môđun:

$$\text{xạ ảnh} \Rightarrow \text{tựa xạ ảnh} \Rightarrow \text{giả xạ ảnh}.$$

Môđun M được gọi là *phẳng* nếu mỗi đơn cấu $f : A \rightarrow B$ thì đồng cấu $1_M \otimes f : M \otimes_R A \rightarrow M \otimes_R B$ cũng là đơn cấu [30, Definition 4.0].

Đối ngẫu với khái niệm bao nội xạ là phủ xạ ảnh. Môđun P được gọi là *phủ xạ ảnh* của môđun M nếu tồn tại một toàn cấu $p : P \rightarrow M$ sao cho P là xạ ảnh và $\text{Ker}(p) \ll P$ [34, pp. 261]. Môđun P được gọi là *phủ giả xạ ảnh* của môđun M nếu tồn tại một toàn cấu $p : P \rightarrow M$ sao cho P là giả xạ ảnh và $\text{Ker}(p) \ll P$ [47, pp. 1399].

Các kết quả sau mô tả điều kiện liên quan đến tính xạ ảnh, giả xạ ảnh và tựa nội xạ.

Bổ đề 1.2.6 ([33, Lemma 4.30]). *Nếu môđun M là A -xạ ảnh thì mọi toàn cấu $f : A \rightarrow M$ chẻ ra.*

Bổ đề 1.2.7 ([47, Corollary 2.18]). *Nếu $A \oplus B$ là môđun giả xạ ảnh thì mọi toàn cấu $f : A \rightarrow B$ chẻ ra.*

Mệnh đề 1.2.8 ([6, Proposition 2.1]). *Nếu $A \oplus M$ là môđun tựa xạ ảnh và A là môđun nội xạ thì M là môđun xạ ảnh. Đối ngẫu, nếu $A \oplus M$ là môđun tựa nội xạ và A là môđun xạ ảnh thì M là môđun nội xạ.*

1.3. Một số lớp vành liên quan

Nếu e là phần tử lũy đẳng của R thì $\text{End}(eR) \cong eRe$. Hai phần tử lũy đẳng e và f của vành R được gọi là *trực giao* với nhau nếu $ef = fe = 0$. Phần tử lũy đẳng $e \neq 0$ của vành R được gọi là *lũy đẳng nguyên thủy* nếu e không thể biểu diễn thành tổng của hai phần tử lũy đẳng khác không và trực giao với nhau. Như vậy, phần tử e là lũy đẳng nguyên thủy của vành R nếu và chỉ nếu eR là môđun không phân tích được, tức là vành eRe chỉ chứa hai phần tử lũy đẳng là 0 và e . Tập các phần tử lũy đẳng nguyên thủy trực giao $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ của vành R được gọi là *đầy đủ* nếu $1 = e_1 + \dots + e_n$. Phần tử lũy đẳng e của R được gọi là *lũy đẳng địa phương* nếu $\text{End}(eR)$ là vành địa phương [1, tr. 145-146].

Nếu với mỗi phần tử lũy đẳng $\bar{f} = f + I$ của vành thương R/I đều tồn tại phần tử lũy đẳng $e \in R$ sao cho $e - f \in I$ thì ta nói rằng *các lũy đẳng nâng được modulo I* (mỗi lũy đẳng $\bar{f}$ của vành thương R/I nâng được đến một lũy đẳng e của vành R) [1, tr. 145].

Bổ đề sau đây trình bày một đặc trưng về đẳng cấu của các môđun sinh bởi phần tử lũy đẳng thông qua căn Jacobson của vành.

Bổ đề 1.3.1 ([34, Lemma B.12]). *Cho R là một vành, e và f là các phần tử lũy đẳng trong R . Khi đó, $eR \cong fR$ khi và chỉ khi $eR/eJ(R) \cong fR/fJ(R)$.*

Kết quả sau đây là đặc trưng của phần tử lũy đẳng địa phương.

Mệnh đề 1.3.2 ([1, Mệnh đề 1.1.6]). Cho R là một vành và $e \in R$ là phần tử lũy đẳng. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

- (1) Phần tử e là lũy đẳng địa phương.
- (2) eR có duy nhất môđun con cực đại.
- (3) $eJ(R)$ là môđun con cực đại duy nhất của eR .
- (4) $eR/eJ(R)$ là môđun đơn.

Osofsky đã xác định đặc trưng của vành Artin nửa đơn thông qua tính nội xạ của các môđun hữu hạn sinh và xyclic, cụ thể như sau:

Định lý 1.3.3 ([35, Theorem]). Cho R là một vành. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:

- (1) Vành R là Artin nửa đơn.
- (2) Mọi R -môđun hữu hạn sinh là nội xạ.
- (3) Mọi R -môđun xyclic là nội xạ.

Khi nghiên cứu một số tính chất của môđun giả xạ ảnh và vành tự đồng cấu của nó, một đặc trưng của vành Artin nửa đơn đã được nghiên cứu.

Mệnh đề 1.3.4 ([47, Proposition 2.20]). Vành R là Artin nửa đơn khi và chỉ khi mọi R -môđun hữu hạn sinh là giả xạ ảnh.

Định nghĩa 1.3.5 ([1, tr. 146]). Một vành R được gọi là nửa địa phương nếu vành thương $R/J(R)$ là Artin nửa đơn.

Định nghĩa 1.3.6 ([1, tr. 150]). Một vành R được gọi là nửa hoàn chỉnh nếu R là nửa địa phương và mọi phần tử lũy đẳng nâng được modulo $J(R)$.

Khái niệm chỉ số của phần tử lũy đẳng nguyên thủy trong vành nửa hoàn chỉnh đã được tác giả Hill đưa ra để sử dụng cho việc phân tích cấu trúc của các vành, cụ thể:

Định nghĩa 1.3.7 ([20, pp. 114]). Cho R là vành nửa hoàn chỉnh và $e \in R$ là phần tử lũy đẳng nguyên thủy. Ta nói rằng e có chỉ số h nếu trong mọi sự phân tích của R_R thành tổng trực tiếp của các môđun không phân tích được thì có đúng h hạng tử trực tiếp đẳng cấu với eR .

Định nghĩa 1.3.8 ([1, tr. 150]). Một vành R được gọi là I -hữu hạn nếu R không chứa tập vô hạn các phần tử lũy đẳng trực giao.

Các vành nửa hoàn chỉnh có thể được đặc trưng thông qua điều kiện I -hữu hạn và sự tồn tại phủ xạ ảnh của môđun. Các kết quả này được trình bày trong [34], cụ thể như sau:

Định lý 1.3.9 ([34, Theorem B.9, Theorem B.21]). *Cho R là vành. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

- (1) *Vành R là nửa hoàn chỉnh.*
- (2) *Vành R là I -hữu hạn và mọi phần tử lũy đẳng nguyên thủy trong R là lũy đẳng địa phương.*
- (3) $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_m$ với e_i là các phần tử lũy đẳng địa phương trực giao.
- (4) *Mọi R -môđun hữu hạn sinh có phủ xạ ảnh.*

Từ Định lý 1.3.9, suy ra được đặc trưng của môđun đơn trên vành nửa hoàn chỉnh.

Hệ quả 1.3.10 ([34, Corollary B.11]). *Cho R là vành nửa hoàn chỉnh và K là R -môđun. Khi đó, K là môđun đơn nếu và chỉ nếu tồn tại phần tử lũy đẳng địa phương $e \in R$ sao cho $K \cong eR/eJ(R)$.*

Nếu R là vành nửa hoàn chỉnh thì tồn tại một tập đầy đủ các phần tử lũy đẳng địa phương trực giao $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Giả sử $\{e_i R / e_i J(R) \mid 1 \leq i \leq n\}$ là tập hợp đại diện đầy đủ các lớp đẳng cấu của R -môđun đơn. Khi đó, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ được gọi là *tập lũy đẳng cơ sở* của R . Nếu $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ thì vành eRe được gọi là *vành cơ sở* của R . Một vành R được gọi là *nửa hoàn chỉnh cơ sở* nếu $m = n$, nghĩa là, $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, trong đó $\{e_i\}_{i=1}^n$ là tập lũy đẳng cơ sở gồm các phần tử lũy đẳng địa phương [34, pp. 62, 260].

Định nghĩa 1.3.11 ([34, pp. 72]). *Idêan một phía A của vành R được gọi là T -lũy linh phải nếu với mọi dãy $a_1, a_2, \dots$ trong A tồn tại một số nguyên $n \geq 1$ sao cho $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 = 0$.*

Định nghĩa 1.3.12 ([34, pp. 269]). *Một vành R được gọi là hoàn chỉnh phải nếu R là nửa hoàn chỉnh và idêan $J(R)$ là T -lũy linh phải.*

Tương tự như đối với vành nửa hoàn chỉnh, định lý tiếp theo là đặc trưng vành hoàn chỉnh phải thông qua sự tồn tại của phủ xạ ảnh, cũng như tính xạ ảnh và tính giả xạ ảnh của môđun. Kết quả này được tổng hợp từ các tài liệu [34] và [46].

Định lý 1.3.13 ([34, Theorem B.38], [46, pp. 948, Theorem 1.16]). *Cho vành R . Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:*

- (1) Vành R là hoàn chỉnh phải.
- (2) Mỗi R -môđun có phủ xạ ảnh.
- (3) Mỗi R -môđun nửa đơn có phủ xạ ảnh.
- (4) Mỗi R -môđun phẳng là xạ ảnh.
- (5) Mỗi R -môđun phẳng là giả xạ ảnh.

Tích trực tiếp của một họ tùy ý các môđun nội xạ là nội xạ. Tuy nhiên, tính chất này không đúng đối với môđun xạ ảnh. Định lý sau đây, dựa trên công trình của Chase, trình bày các điều kiện tương đương để môđun xạ ảnh bảo toàn qua tích trực tiếp.

Định lý 1.3.14 ([9, Theorem 3.3]). *Cho vành R . Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

- (1) Tích trực tiếp của họ bất kỳ các R -môđun xạ ảnh là xạ ảnh.
- (2) Tích trực tiếp của họ bất kỳ các bản sao của R là R -môđun xạ ảnh.
- (3) Vành R là hoàn chỉnh phải và mỗi idêan trái hữu hạn sinh của R là hữu hạn liên kết.

Sau đây là một số kết quả về đặc trưng của vành di truyền phải và nửa di truyền phải được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính.

Định nghĩa 1.3.15 ([16, pp. 340]). Một vành R được gọi là *nửa di truyền phải* nếu mọi idêan phải hữu hạn sinh của R là xạ ảnh. Điều này cũng tương đương với mọi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun xạ ảnh là xạ ảnh. Một vành R được gọi là *nửa di truyền* nếu R là vành nửa di truyền trái và phải.

Một vành R được gọi là *di truyền phải* nếu mọi idêan phải của R là xạ ảnh. Điều này cũng tương đương với mọi môđun con của R -môđun xạ ảnh là xạ ảnh. Một vành R được gọi là *di truyền* nếu R là vành di truyền trái và phải.

Định lý 1.3.16 ([11, Theorem 2.3]). *Vành R là di truyền phải khi và chỉ khi mỗi idêan phải chính của vành tự đồng cấu $\text{End}(F)$ là xạ ảnh, trong đó F là R -môđun tự do.*

Định nghĩa 1.3.17 ([36, pp. 547]). Một vành R được gọi là *S-vành phải* nếu mỗi R -môđun hữu hạn sinh phẳng là xạ ảnh. Một vành R được gọi là *S-vành* nếu R là *S-vành phải* và *S-vành trái*.

Nếu R là vành nửa di truyền phải (trái) thì khái niệm *S-vành* có tính đối xứng. Kết quả này đã được Puninski và Rothmaler khẳng định trong mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 1.3.18 ([36, Proposition 4.10]). Cho R là vành nửa di truyền phải. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:

- (1) R là S -vành phải.
- (2) Vành ma trận $M_n(R)$ là I -hữu hạn với mọi n .
- (3) R là S -vành trái.

Trong trường hợp này, R cũng là vành nửa di truyền trái.

Định nghĩa 1.3.19 ([7, pp. 72-73]). Môđun M được gọi là *coherent* nếu mỗi môđun con hữu hạn sinh của M là hữu hạn biểu diễn được. Một vành R được gọi là *coherent phải* nếu R_R là môđun coherent.

Một vành R được gọi là Π -*coherent phải* nếu mỗi môđun con hữu hạn sinh của tích trực tiếp một họ tùy ý các bản sao của R là hữu hạn biểu diễn được. Vành R được gọi là Π -*coherent* nếu R là Π -coherent trái và Π -coherent phải.

Định lý sau đây tổng hợp các kết quả về đặc trưng vành nửa di truyền từ tài liệu [11] và [30].

Định lý 1.3.20 ([11, Theorem 2.4], [30, Lemma 4.66, Theorem 4.67 (Chase)]). Các khẳng định sau là tương đương đối với vành R :

- (1) R là vành nửa di truyền phải.
- (2) Mỗi ideal phải chính của vành ma trận $M_n(R)$ là xạ ảnh.
- (3) R là vành coherent phải và thỏa mãn một trong các điều kiện tương đương sau:
 - (a) Mọi môđun con của R -môđun phải phẳng là phẳng.
 - (b) Mọi môđun con của R -môđun trái phẳng là phẳng.

Một môđun M được gọi là *xoắn* nếu M nhúng được vào tích trực tiếp các bản sao của R_R [30, Definition 4.64]. Đặc trưng vành nửa di truyền liên quan đến tính xạ ảnh của các môđun hữu hạn sinh xoắn được phát biểu trong định lý sau.

Định lý 1.3.21 ([42, Theorem 3.5]). Cho vành R . Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

- (1) Mọi R -môđun phải hữu hạn sinh xoắn là xạ ảnh.
- (2) Mọi R -môđun trái hữu hạn sinh xoắn là xạ ảnh.
- (3) Vành R là nửa di truyền trái và Π -coherent phải.

(4) Vành R là nửa di truyền phải và Π -coherent trái.

Đặc biệt, vành R thỏa mãn các điều kiện tương đương trên là vành nửa di truyền phải và trái.

Định nghĩa 1.3.22 ([1, tr. 129]). Một vành R được gọi là *nửa nguyên sơ* nếu R là nửa địa phương và $J(R)$ là idêan lũy linh.

Mỗi vành nửa nguyên sơ là vành hoàn chỉnh phải (trái). Ngược lại, điều kiện để mỗi vành hoàn chỉnh phải là nửa nguyên sơ được trình bày trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1.3.23 ([45, Corollary 2]). Nếu R là vành hoàn chỉnh phải và mỗi idêan phải chính của R là xạ ảnh thì R là nửa nguyên sơ và mỗi idêan trái chính của R cũng là xạ ảnh. Hơn nữa, nếu R là vành di truyền phải và hoàn chỉnh phải thì R cũng là vành di truyền trái.

Kết quả về đặc trưng của môđun bất biến lũy linh trên vành nửa nguyên sơ được phát biểu như sau:

Bổ đề 1.3.24 ([37, Corollary 2.7]). Cho R là vành nửa nguyên sơ và M là R -môđun. Khi đó, M là bất biến lũy linh khi và chỉ khi mọi tự đồng cấu lũy linh của các môđun con của M mở rộng đến tự đồng cấu lũy linh của M .

Định nghĩa 1.3.25 ([34, pp. 20]). Một vành được gọi là *tựa Frobenius* nếu nó là vành Artin hai phía và tự nội xạ hai phía.

Các tác giả Faith và Walker đã đưa ra một đặc trưng về vành tựa Frobenius, đó là lớp vành mà mỗi môđun xạ ảnh là nội xạ và ngược lại, cụ thể như sau:

Định lý 1.3.26 ([14, Theorem 24.20]). Cho R là vành. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:

- (1) Vành R là tựa Frobenius.
- (2) Mỗi R -môđun nội xạ là xạ ảnh.
- (3) Mỗi R -môđun xạ ảnh là nội xạ.

Từ các kết quả nghiên cứu của Fuller, Faith, Byrd ([6], [14], [15]), chúng ta thấy rằng trên vành Artin idêan chính, lớp môđun tựa xạ ảnh và lớp môđun đối ngẫu là trùng nhau. Chúng tôi nhắc lại kết quả này trong định lý tiếp theo.

Định lý 1.3.27 ([6], [14], [15]). Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R :

- (1) Vành R là Artin idêan chính.

- (2) Mỗi R -môđun tựa nội xạ là tựa xạ ảnh.
- (3) Mỗi R -môđun tựa xạ ảnh là tựa nội xạ.
- (4) Mỗi vành thương của R là tựa Frobenius.

Định nghĩa 1.3.28 ([15, pp. 132]). Cho R là vành Artin phải. Một môđun M được gọi là *môđun chuỗi* nếu M có duy nhất chuỗi hợp thành. Một vành R được gọi là *vành chuỗi tổng quát* nếu mỗi R -môđun xạ ảnh không phân tích được là môđun chuỗi.

Đặc trưng vành chuỗi tổng quát gắn liền với tính chất tựa nội xạ hoặc tựa xạ ảnh của các môđun không phân tích được. Tính chất này đã được nghiên cứu bởi tác giả Fuller.

Định lý 1.3.29 ([15, Theorem 5.3]). Cho R là vành Artin trái. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:

- (1) R là vành chuỗi tổng quát.
- (2) Mỗi R -môđun không phân tích được là tựa xạ ảnh.
- (3) Mỗi R -môđun không phân tích được là tựa nội xạ.
- (4) Mỗi R -môđun tựa nội xạ không phân tích được là tựa xạ ảnh.
- (5) Mỗi R -môđun tựa xạ ảnh không phân tích được là tựa nội xạ.

Mệnh đề 1.3.30 ([14, Proposition 25.4.17A]). Nếu R là vành Artin chuỗi thì mỗi môđun đẳng cấu với tổng trực tiếp của các iđêan chuỗi cyclic một phía. Trong trường hợp này, mỗi môđun đẳng cấu với tổng trực tiếp của các iđêan cyclic một phía.

Chúng tôi nhắc lại kết quả về iđêan cực tiểu trên vành nguyên tố.

Định lý 1.3.31 ([29, Theorem 11.11]). Cho R là vành có iđêan trái cực tiểu U . Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

- (1) R là vành nguyên tố.
- (2) R là vành nguyên thủy trái.
- (3) R là vành nguyên thủy phải.

Hơn nữa, nếu các điều kiện trên được thỏa mãn thì R cũng có iđêan phải cực tiểu B . Mọi R -môđun trái (phải) cực tiểu trung thành đẳng cấu với ${}_R U$ (tương ứng, B_R).

Định nghĩa 1.3.32 ([31, pp. 306-307]). Một vành R được gọi là *vành chính quy Von Neumann* (hay *vành chính quy*) nếu với mỗi $a \in R$, tồn tại phần tử $b \in R$ sao cho $a = aba$. Một vành R được gọi là *vành chính quy khả nghịch* nếu với mỗi $a \in R$, tồn tại phần tử khả nghịch $b \in R$ sao cho $a = aba$. Một vành R được gọi là *vành chính quy mạnh* nếu với mỗi $a \in R$, tồn tại $b \in R$ sao cho $a = a^2b$.

Định nghĩa 1.3.33 ([31, pp. 306-307]). Một vành R được gọi là *nửa chính quy* nếu $R/J(R)$ là chính quy và các lũy đẳng nâng được modulo $J(R)$.

Định lý 1.3.34 ([34, Theorem B.56]). *Vành R là nửa chính quy khi và chỉ khi mỗi R -môđun phải (trái) hữu hạn biểu diễn được có phủ xạ ảnh.*

Tính chất vành tự đồng cấu của môđun bất biến đẳng cấu được trình bày trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.3.35 ([17, Proposition 1]). *Cho M là môđun bất biến đẳng cấu, $R' = \text{End}(M)$ và $\Delta = \{r \in R' : \text{Ker}(r) \leq^e M\}$. Khi đó, $\Delta = J(R')$, $R'/J(R')$ là vành chính quy và các lũy đẳng nâng được modulo $J(R')$.*

Từ Mệnh đề 1.3.35, ta suy ra kết quả sau.

Hệ quả 1.3.36. *Cho R là vành bất biến đẳng cấu phải. Khi đó, $J(R) = Z(R_R)$.*

Bổ đề sau là tính chất vành bất biến đẳng cấu phải thông qua linh hóa tử phải của các phần tử trên vành.

Bổ đề 1.3.37 ([40, Lemma 2.2]). *Cho R là vành bất biến đẳng cấu phải. Khi đó, bất kỳ $x, y \in R$ mà $r_R(x) = r_R(y)$ thì $Rx = Ry$.*

Định nghĩa 1.3.38 ([22, pp. 73]). Một vành R được gọi là *q-vành phải* nếu mỗi idêan phải của R là tựa nội xạ.

Đặc trưng của *q-vành phải* trong trường hợp vành không phân tích được, không là vành đơn, không là vành địa phương và đối sinh nội xạ được phát biểu như sau:

Định lý 1.3.39 ([20, Theorem 2.9]). *Cho R là vành cơ sở, không phân tích được, không là vành đơn, không là vành địa phương sao cho R_R là đối sinh nội xạ. Khi đó, R là *q-vành phải* khi và chỉ khi $eRf \subseteq \text{Soc}(R_R)$, trong đó e và f là các phần tử lũy đẳng trực giao của R .*

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số tính chất lớp vành mở rộng của *q-vành*.

Định nghĩa 1.3.40 ([44, pp. 13]). Một vành R được gọi là *a-vành phải* nếu mỗi idêan phải của R là bất biến đẳng cấu.

Một số tính chất của lớp *a-vành phải* được trình bày trong các bổ đề tiếp theo.

Bổ đề 1.3.41 ([27, Proposition 3.1]). *Các khẳng định sau là tương đương đối với vành R :*

- (1) R là a -vành phải.
- (2) Mỗi ideal phải cốt yếu của R là bất biến đẳng cấu.
- (3) Vành R là bất biến đẳng cấu phải và mỗi ideal phải cốt yếu của R là T -môđun trái, trong đó T là vành con của R được sinh bởi các phần tử khả nghịch của R .

Bổ đề 1.3.42 ([27, Lemma 3.3, Lemma 4.1]). *Cho A, B là các ideal phải của a -vành phải R sao cho $A \cap B = 0$. Khi đó,*

- (1) Nếu $\varphi : A \rightarrow B$ là đồng cấu khác không thì $\varphi(A)$ là môđun nửa đơn. Hơn nữa, nếu B là môđun đều thì $\varphi(A)$ là môđun đơn.
- (2) Nếu $A \cong B$ thì A là ideal phải nửa đơn, nội xạ và không suy biến.
- (3) Nếu e là phần tử lũy đẳng không tầm thường của R sao cho $eR(1 - e) \neq 0$ thì $\text{Soc}(eR) \neq 0$.

Sau đây, chúng tôi nhắc lại về vành ma trận tam giác hình thức trong [28, pp. 3-5, 34].

Cho hai vành R, S và M là $R - S$ -song môđun. Khi đó,

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid r \in R, s \in S, m \in M \right\}$$

là vành với phép cộng và phép nhân xác định như sau:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r' & m' \\ 0 & s' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r + r' & m + m' \\ 0 & s + s' \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' & m' \\ 0 & s' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} rr' & rm' + ms' \\ 0 & ss' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vành K được gọi là *vành ma trận tam giác hình thức*.

Phạm trừ các K -môđun tương đương với phạm trừ $\mathbb{T}$ gồm các bộ (X, Y, f) , trong đó X là R -môđun, Y là S -môđun và $f : X \otimes_R M \rightarrow Y$ là đồng cấu của các S -môđun. Một K -môđun (X, Y, f) là nhóm cộng $X \oplus Y$ với phép toán trên K xác định như sau:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} = (xr, f(x \otimes m) + ys).$$

Cho các K -môđun (X_1, Y_1, f_1) và (X_2, Y_2, f_2) , một K -đồng cấu $\varphi : (X_1, Y_1, f_1) \rightarrow (X_2, Y_2, f_2)$ là bộ (φ_1, φ_2) , trong đó $\varphi_1 : X_1 \rightarrow X_2$ là đồng cấu của các R -môđun và $\varphi_2 : Y_1 \rightarrow Y_2$ là đồng cấu của các S -môđun sao cho biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} X_1 \otimes_R M & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \\ \downarrow \varphi_1 \otimes 1_M & & \downarrow \varphi_2 \\ X_2 \otimes_R M & \xrightarrow{f_2} & Y_2 \end{array}$$

Một K -đồng cấu $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : (X_1, Y_1, f_1) \rightarrow (X_2, Y_2, f_2)$ là đơn cấu (toàn cấu) nếu φ_1 và φ_2 là các đơn cấu (toàn cấu).

(X_0, Y_0, f_0) được gọi là *môđun con* của K -môđun (X, Y, f) nếu $X_0 \leq X_R$ và $Y_0 \leq Y_S$ sao cho biểu đồ sau đây giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} X_0 \otimes_R M & \xrightarrow{f_0} & Y_0 \\ \downarrow \iota_1 \otimes 1_M & & \downarrow \iota_2 \\ X \otimes_R M & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

trong đó $\iota_1 : X_0 \rightarrow X$, $\iota_2 : Y_0 \rightarrow Y$ là các phép nhúng.

Định lý 1.3.43 ([28, Theorem 2.5.1]). *Vành $K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ là vành Artin trái khi và chỉ khi R, S là các vành Artin trái và ${}_R M$ là môđun Artin.*

CHƯƠNG 2.

LỚP MÔĐUN GIẢ XẠ ẢNH VÀ CÁC VÀNH LIÊN QUAN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu môđun giả xạ ảnh trên các lớp vành cổ điển. Nội dung chính của chương chia thành ba phần. Phần thứ nhất trình bày đặc trưng của một số lớp vành: vành hoàn chỉnh phải, vành nửa hoàn chỉnh, vành nửa chính quy, S -vành phải, PP -vành phải, vành đồng thời coherent trái và hoàn chỉnh phải. Trong phần thứ hai, chúng tôi đặc trưng vành nửa di truyền phải thông qua tính giả xạ ảnh của môđun con hữu hạn sinh của môđun xạ ảnh. Đồng thời, chúng tôi khảo sát tính giả xạ ảnh của môđun trên vành di truyền phải. Từ đó, chúng tôi xem xét đặc trưng của các lớp vành: nửa di truyền phải và S -vành phải, nửa di truyền và Π -coherent, di truyền và nửa nguyên sơ, hoàn chỉnh phải và di truyền phải. Trong phần cuối của chương, chúng tôi nghiên cứu tính giả xạ ảnh của môđun trên vành nửa địa phương, đồng thời xem xét các điều kiện để lớp môđun giả xạ ảnh trùng với lớp môđun giả nội xạ. Chương này được viết trong [19].

2.1. Môđun giả xạ ảnh trên vành nửa hoàn chỉnh, vành hoàn chỉnh

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu đặc trưng vành nửa hoàn chỉnh và vành hoàn chỉnh phải thông qua phủ giả xạ ảnh của các môđun. Đồng thời, đặc trưng lớp vành hoàn chỉnh phải cùng các mở rộng có liên quan đến tính giả xạ ảnh của môđun cũng được khảo sát. Các kết quả chính của phần này được trình bày trong Định lý 2.1.5, Định lý 2.1.6 và Định lý 2.1.9.

Vành Artin nửa đơn là lớp vành mà mỗi môđun xylic là nội xạ (Định lý 1.3.3). Lớp vành này cũng được đặc trưng thông qua tính giả xạ ảnh của các môđun. Cụ thể, một vành R là Artin nửa đơn nếu và chỉ nếu mỗi R -môđun hữu hạn sinh là giả xạ ảnh (Mệnh đề 1.3.4). Chúng tôi tiếp tục chỉ ra đặc trưng của vành Artin nửa đơn thông qua tính giả nội xạ của môđun hữu hạn sinh.

Mệnh đề 2.1.1. *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R :*

- (1) *Vành R là Artin nửa đơn.*
- (2) *Mọi R -môđun hữu hạn sinh là giả xạ ảnh.*

(3) Mọi R -môđun hữu hạn sinh là giả nội xạ.

Chứng minh. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Theo Mệnh đề 1.3.4, hai điều kiện này tương đương.

(1) $\Rightarrow$ (3) Vì R là vành Artin nửa đơn nên mọi R -môđun hữu hạn sinh M là nội xạ. Do đó, M cũng là giả nội xạ.

(3) $\Rightarrow$ (1) Giả sử C là R -môđun cyclic. Gọi $N = R_R \oplus C$ và vì vậy N là R -môđun phải hữu hạn sinh. Theo giả thiết, N là giả nội xạ và do đó C là R_R -nội xạ. Điều này chứng tỏ C là môđun nội xạ. Từ kết quả của Osofsky (Định lý 1.3.3), chúng ta kết luận R là vành Artin nửa đơn. $\square$

Như đã biết, vành nửa hoàn chỉnh và hoàn chỉnh phải là các vành được khái quát từ vành Artin nửa đơn. Đặc trưng hai lớp vành này gắn liền với sự tồn tại của phủ xạ ảnh, cụ thể: Một vành R là hoàn chỉnh phải khi và chỉ khi mọi R -môđun có phủ xạ ảnh; còn R là nửa hoàn chỉnh nếu và chỉ nếu mọi môđun hữu hạn sinh trên R có phủ xạ ảnh. Chúng tôi sẽ mở rộng các kết quả trên, khảo sát vành nửa hoàn chỉnh và hoàn chỉnh phải thông qua phủ giả xạ ảnh. Trước khi trình bày các kết quả chính, chúng tôi giới thiệu một kỹ thuật để liên kết giữa tính xạ ảnh và giả xạ ảnh, cũng như giữa phủ xạ ảnh và phủ giả xạ ảnh.

Mệnh đề 2.1.2. Cho toàn cấu $f : P \rightarrow M$, trong đó M là R -môđun và P là R -môđun xạ ảnh. Khi đó,

(1) Môđun M là xạ ảnh khi và chỉ khi môđun $P \oplus M$ là giả xạ ảnh.

(2) Môđun M có phủ xạ ảnh khi và chỉ khi môđun $P \oplus M$ có phủ giả xạ ảnh.

Chứng minh. (1) Nếu M là xạ ảnh thì $P \oplus M$ cũng là xạ ảnh. Do đó, $P \oplus M$ là giả xạ ảnh. Ngược lại, giả sử $P \oplus M$ là giả xạ ảnh. Từ Bổ đề 1.2.7, toàn cấu $f : P \rightarrow M$ chẻ ra. Suy ra M đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của P , nên M là xạ ảnh.

(2) Gọi Q là phủ xạ ảnh của M và tồn tại toàn cấu $q : Q \rightarrow M$ thỏa mãn $\text{Ker}(q) \ll Q$ với Q là môđun xạ ảnh. Vì P là xạ ảnh nên $P \oplus Q$ là giả xạ ảnh. Xét đồng cấu $1_P \oplus q : P \oplus Q \rightarrow P \oplus M$ xác định bởi $(1_P \oplus q)(x, y) = (x, q(y))$. Khi đó, $1_P \oplus q$ là toàn cấu và $\text{Ker}(1_P \oplus q) = \text{Ker}(q)$, suy ra $\text{Ker}(1_P \oplus q) \ll P \oplus Q$. Vì vậy, $P \oplus Q$ là phủ giả xạ ảnh của $P \oplus M$. Ngược lại, giả sử $q : Q \rightarrow P \oplus M$ là toàn cấu đối cốt yếu sao cho Q là môđun giả xạ ảnh. Gọi $\pi : P \oplus M \rightarrow P$ là phép chiếu chính tắc, suy ra $\pi \circ q : Q \rightarrow P$ là toàn cấu. Vì P là xạ ảnh nên $\pi \circ q$ là toàn cấu chẻ ra. Khi đó, tồn tại đồng cấu $\beta : P \rightarrow Q$ sao cho $\pi \circ q \circ \beta = 1_P$ và $Q = \text{Im}(\beta) \oplus \text{Ker}(\pi \circ q)$. Do đó, β là một đơn cấu và vì vậy $P \cong \text{Im}(\beta)$. Đặt $P' = \text{Ker}(\pi \circ q)$ và $q_1 = q|_{P'}$, suy ra $q_1(P') = q(P') = M$. Điều này chứng tỏ $q_1 : P' \rightarrow M$ là toàn cấu. Mặt khác,

$\text{Ker}(q_1) = \text{Ker}(q)$ và $\text{Ker}(q_1) \ll P'$. Để chứng minh P' là phủ xạ ảnh của M , ta cần chứng minh P' là môđun xạ ảnh. Xét biểu đồ sau

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \nearrow \text{dotted} & \downarrow f & & \\ P' & \xrightarrow{q_1} & M & \longrightarrow & 0. \\ & & \downarrow & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

Vì P là xạ ảnh nên tồn tại đồng cấu $g : P \rightarrow P'$ sao cho biểu đồ trên giao hoán, nghĩa là $q_1 \circ g = f$. Từ $P' = \text{Im}(g) \oplus \text{Ker}(q_1)$ và $\text{Ker}(q_1) \ll P'$ nên ta có $P' = \text{Im}(g)$. Vì vậy, g là toàn cấu. Hơn nữa, vì $Q \cong P \oplus P'$ là giả xạ ảnh nên g là toàn cấu chẻ ra (Bổ đề 1.2.7). Do đó, P' đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của P . Theo giả thiết, P là xạ ảnh; suy ra P' là xạ ảnh. Vậy, P' là phủ xạ ảnh của M . $\square$

Áp dụng Mệnh đề 2.1.2 cho các lớp vành: hoàn chỉnh phải, nửa hoàn chỉnh và nửa chính quy, chúng tôi thu được kết quả về đặc trưng vành thông qua phủ giả xạ ảnh của các môđun.

Hệ quả 2.1.3 ([46, Theorem 1.16]). *Vành R là hoàn chỉnh phải khi và chỉ khi mọi R -môđun có phủ giả xạ ảnh.*

Chứng minh. Giả sử R là vành hoàn chỉnh phải. Khi đó, mọi R -môđun có phủ xạ ảnh (Định lý 1.3.13). Từ đó suy ra mọi R -môđun có phủ giả xạ ảnh. Ngược lại, gọi M là một R -môđun phải và $f : F \rightarrow M$ là một toàn cấu với F là R -môđun phải tự do. Theo giả thiết, $F \oplus M$ có phủ giả xạ ảnh. Áp dụng Mệnh đề 2.1.2, M có phủ xạ ảnh. Vậy, R là vành hoàn chỉnh phải. $\square$

Hệ quả 2.1.4. *Cho R là vành. Khi đó,*

- (1) *Vành R là nửa hoàn chỉnh khi và chỉ khi mọi R -môđun hữu hạn sinh có phủ giả xạ ảnh.*
- (2) *Vành R là nửa chính quy nếu và chỉ nếu mọi R -môđun hữu hạn biểu diễn được có phủ giả xạ ảnh.*

Từ Mệnh đề 2.1.2 và Hệ quả 2.1.3, chúng tôi kết luận một đặc trưng của vành hoàn chỉnh phải trong định lý dưới đây.

Định lý 2.1.5. *Vành R là hoàn chỉnh phải khi và chỉ khi môđun $M \oplus F$ có phủ giả xạ ảnh, trong đó M là R -môđun nửa đơn và F là R -môđun tự do.*

Chứng minh. Theo Hệ quả 2.1.3, nếu M là R -môđun nửa đơn và F là R -môđun tự do thì $M \oplus F$ có phủ giả xạ ảnh. Ngược lại, cho M là R -môđun nửa đơn và F là môđun tự do. Khi đó, gọi $\psi : F \rightarrow M$ là một toàn cấu. Theo giả thiết, $F \oplus M$ có phủ giả xạ ảnh. Áp dụng Mệnh đề 2.1.2, M có phủ xạ ảnh. Vì vậy, R là vành hoàn chỉnh phải theo Định lý 1.3.13. $\square$

Một mở rộng của lớp vành nửa hoàn chỉnh là S -vành. Trong định lý sau, chúng tôi đặc trưng S -vành phải thông qua tính giả xạ ảnh và tính tựa xạ ảnh của môđun.

Định lý 2.1.6. *Cho R là vành. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

- (1) R là S -vành phải.
- (2) Mỗi R -môđun hữu hạn sinh phẳng là tựa xạ ảnh.
- (3) Mỗi R -môđun hữu hạn sinh phẳng là giả xạ ảnh.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Cho R là S -vành phải. Khi đó, mỗi R -môđun hữu hạn sinh phẳng M là xạ ảnh. Từ đó suy ra M cũng là tựa xạ ảnh.

(2) $\Rightarrow$ (3) Hiển nhiên vì mỗi môđun tựa xạ ảnh là giả xạ ảnh.

(3) $\Rightarrow$ (1) Gọi P là R -môđun hữu hạn sinh phẳng và $f : K \rightarrow P$ là một toàn cấu với K là R -môđun hữu hạn sinh tự do. Suy ra $P \oplus K$ là môđun hữu hạn sinh phẳng. Do đó, $P \oplus K$ là giả xạ ảnh bởi vì (3). Áp dụng Mệnh đề 2.1.2, ta được P là xạ ảnh. Vì vậy, R là S -vành phải. $\square$

Một vành R được gọi là PP -vành phải nếu mỗi idêan phải chính của R là xạ ảnh [16, pp. 340]. Golan đã chứng minh rằng R là PP -vành phải khi và chỉ khi mỗi idêan phải chính của vành ma trận $\mathbb{M}_2(R)$ được sinh bởi ma trận chéo là tựa xạ ảnh [16, Lemma 4.2]. Dựa trên kết quả này, chúng tôi mở rộng đặc trưng của PP -vành phải bằng cách sử dụng tính giả xạ ảnh trong Định lý 2.1.7.

Định lý 2.1.7. *Vành R là PP -vành phải nếu và chỉ nếu mỗi idêan phải chính của vành ma trận $\mathbb{M}_2(R)$ được sinh bởi ma trận chéo là $\mathbb{M}_2(R)$ -môđun phải giả xạ ảnh.*

Chứng minh. Cho R là PP -vành phải. Khi đó, mỗi idêan phải chính của vành ma trận $\mathbb{M}_2(R)$ được sinh bởi ma trận chéo là $\mathbb{M}_2(R)$ -môđun phải tựa xạ ảnh bởi [16, Lemma 4.2]. Do đó, mỗi idêan phải chính của vành ma trận $\mathbb{M}_2(R)$ được sinh bởi ma trận chéo là $\mathbb{M}_2(R)$ -môđun giả xạ ảnh. Ngược lại, gọi $S = \mathbb{M}_2(R)$, $a \in R$ và I là idêan phải chính của S được sinh bởi ma trận chéo $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Theo giả thiết, I là

S -môđun giả xạ ảnh. Nếu $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ thì S và R tương đương Morita với ánh xạ

$M \rightarrow Me$, trong đó M là S -môđun. Vì I là S -môđun phải giả xạ ảnh nên I cũng là R -môđun giả xạ ảnh. Vì $Ie \cong aR \oplus R$ (như các R -môđun phải) và I là giả xạ ảnh nên suy ra $aR \oplus R$ là R -môđun giả xạ ảnh. Do đó, toàn cấu chính tắc $\eta : R \rightarrow aR$ chẻ ra. Vậy, aR là xạ ảnh và R là PP -vành phải. $\square$

Định nghĩa 2.1.8. Môđun M được gọi là Π -giả xạ ảnh nếu tích trực tiếp của một họ tùy ý các bản sao của M là giả xạ ảnh.

Tác giả Chase đã nghiên cứu và chứng minh môđun xạ ảnh bảo toàn qua tích trực tiếp khi và chỉ khi vành R là hoàn chỉnh phải và mọi idêan trái hữu hạn sinh của R là hữu hạn liên kết (Định lý 1.3.14). Mở rộng kết quả này, chúng tôi chỉ ra đặc trưng vành bằng cách xem xét tính giả xạ ảnh của tích trực tiếp các môđun xạ ảnh (phẳng).

Định lý 2.1.9. Cho R là vành. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

- (1) Vành R là coherent trái và hoàn chỉnh phải.
- (2) Tích trực tiếp một họ bất kỳ các bản sao của R là R -môđun xạ ảnh.
- (3) Tích trực tiếp của các R -môđun xạ ảnh là giả xạ ảnh.
- (4) Tích trực tiếp của các R -môđun phẳng là giả xạ ảnh.
- (5) Mỗi R -môđun xạ ảnh là Π -giả xạ ảnh.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Cho R là vành coherent trái và hoàn chỉnh phải. Khi đó, mỗi idêan trái hữu hạn sinh của R là hữu hạn biểu diễn được. Do đó, mỗi idêan trái hữu hạn sinh của R là hữu hạn liên kết. Vì R cũng là vành hoàn chỉnh phải nên tích trực tiếp một họ bất kỳ các bản sao của R là xạ ảnh theo Định lý 1.3.14.

(2) $\Rightarrow$ (4) Theo (2), ta có R là vành hoàn chỉnh phải. Khi đó, mỗi môđun phẳng của R là xạ ảnh. Gọi $M = \prod_{i \in I} M_i$ là tích trực tiếp của một họ các R -môđun phẳng M_i với $i \in I$. Như vậy, M là tích trực tiếp của họ bất kỳ các môđun xạ ảnh. Theo Định lý 1.3.14, M là xạ ảnh và do đó M là giả xạ ảnh.

(4) $\Rightarrow$ (3) Đặt $M = \prod_{i \in I} M_i$ là tích trực tiếp của một họ các R -môđun xạ ảnh M_i với $i \in I$. Vì mỗi môđun xạ ảnh là phẳng nên các M_i , $i \in I$ là môđun phẳng. Theo (4), M là giả xạ ảnh.

(3) $\Rightarrow$ (1) Gọi $M = \prod_{i \in I} M_i$ là tích trực tiếp của một họ các R -môđun xạ ảnh M_i với $i \in I$ và $f : F \rightarrow M$ là một toàn cấu, trong đó F là R -môđun tự do. Từ đó suy ra $M \times F$ là giả xạ ảnh bởi vì (3). Vì $M \times F \cong M \oplus F$ nên $M \oplus F$ cũng là giả xạ ảnh. Áp dụng Mệnh đề 2.1.2, ta có M là xạ ảnh. Do đó, R là vành hoàn chỉnh

phải và mỗi idêan trái hữu hạn sinh của R là hữu hạn liên kết (Định lý 1.3.14). Vậy, R là vành coherent trái và hoàn chỉnh phải.

(3) $\Rightarrow$ (5) Gọi M là R -môđun xạ ảnh. Khi đó, tích trực tiếp các bản sao của M là giả xạ ảnh. Do đó, M là Π -giả xạ ảnh.

(5) $\Rightarrow$ (3) Giả sử $M = \prod_{i \in I} M_i$ là tích trực tiếp của một họ các R -môđun xạ ảnh M_i với $i \in I$ và $g_i : M \rightarrow M_i$, trong đó $i \in I$ là phép chiếu chính tắc. Khi đó, tồn tại R -môđun tự do F và một toàn cấu $f : F \rightarrow M$. Vì mỗi M_i là xạ ảnh nên toàn cấu $g_i \circ f : F \rightarrow M_i$ chẻ ra. Do đó, tồn tại các môđun con $A_i \leq F$, $T_i \leq F$ sao cho $F = A_i \oplus T_i$ và $M_i \cong A_i$ với mọi $i \in I$. Mà $F^I = \prod_{i \in I} (A_i \oplus T_i) \cong (\prod_{i \in I} A_i) \oplus (\prod_{i \in I} T_i)$ và F^I là giả xạ ảnh nên $\prod_{i \in I} A_i$ là giả xạ ảnh. Vậy, chúng ta có $M = \prod_{i \in I} M_i \cong \prod_{i \in I} A_i$ là giả xạ ảnh. $\square$

Vì mỗi môđun tự do là xạ ảnh và mỗi môđun xạ ảnh đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của môđun tự do nên kết quả sau được xem như là hệ quả của Định lý 2.1.9.

Hệ quả 2.1.10. *Vành R là coherent trái và hoàn chỉnh phải khi và chỉ khi mỗi R -môđun tự do là Π -giả xạ ảnh.*

Chứng minh. Gọi M là R -môđun tự do. Khi đó, M cũng là xạ ảnh. Theo Định lý 2.1.9, M là Π -giả xạ ảnh. Ngược lại, gọi P là R -môđun xạ ảnh. Vì mỗi môđun xạ ảnh đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của môđun tự do nên $P \cong A \leq^\oplus R^{(I)}$ với I là tập chỉ số nào đó. Theo giả thiết, môđun tự do $R^{(I)}$ là Π -giả xạ ảnh nên P cũng là Π -giả xạ ảnh. Áp dụng Định lý 2.1.9, R là vành coherent trái và hoàn chỉnh phải. $\square$

2.2. Môđun giả xạ ảnh trên vành nửa di truyền, vành di truyền

Phần này nghiên cứu tính chất của vành nửa di truyền phải và vành di truyền phải, cùng với các mở rộng liên quan thông qua tính giả xạ ảnh của môđun. Các kết quả chính của phần này là Định lý 2.2.1, Định lý 2.2.3, Định lý 2.2.5, Định lý 2.2.6, Định lý 2.2.7, Định lý 2.2.8.

Dựa trên một số kết quả đã biết về vành nửa di truyền phải và vành di truyền phải, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu đặc trưng các vành này thông qua tính giả xạ ảnh của môđun và thu được một số kết quả. Dưới đây là đặc trưng của vành nửa di truyền phải.

Định lý 2.2.1. *Các khẳng định sau là tương đương đối với vành R :*

- (1) R là vành nửa di truyền phải.

- (2) *Mỗi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun xạ ảnh là giả xạ ảnh.*
- (3) *Với mọi R -môđun hữu hạn sinh tự do F , mỗi idêan phải chính của $S = \text{End}(F)$ là S -môđun giả xạ ảnh.*

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Vì R là vành nửa di truyền phải nên mỗi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun xạ ảnh là xạ ảnh. Do đó, mỗi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun xạ ảnh là giả xạ ảnh.

(2) $\Rightarrow$ (1) Gọi K là môđun con hữu hạn sinh của R -môđun xạ ảnh P và một toàn cấu $f : F \rightarrow K$, trong đó F là R -môđun hữu hạn sinh tự do. Vì $F \oplus K$ là môđun con hữu hạn sinh của môđun xạ ảnh $F \oplus P$ nên $F \oplus K$ là giả xạ ảnh bởi vì (2). Theo Mệnh đề 2.1.2, K là xạ ảnh. Vậy, R là vành nửa di truyền phải.

(1) $\Rightarrow$ (3) Vì F là R -môđun hữu hạn sinh tự do nên $F \cong R^n$ với $n \in \mathbb{N}$. Suy ra $\text{End}(F) \cong \text{End}(R^n) \cong \mathbb{M}_n(R)$. Áp dụng Định lý 1.3.20 cho vành nửa di truyền phải R , mỗi idêan phải chính của vành ma trận $\mathbb{M}_n(R)$ là xạ ảnh. Do đó, mỗi idêan phải chính của $S = \text{End}(F)$ là giả xạ ảnh.

(3) $\Rightarrow$ (1) Với F là R -môđun hữu hạn sinh tự do, ta có $S = \text{End}(F) \cong \mathbb{M}_n(R)$. Khi đó, $F \oplus F$ là môđun tự do sao cho $\text{End}(F \oplus F) \cong \mathbb{M}_2(S)$. Từ đó suy ra mỗi idêan phải chính của $\text{End}(F \oplus F) \cong \mathbb{M}_2(S)$ là giả xạ ảnh bởi vì (3). Từ Định lý 2.1.7, suy ra S là PP -vành phải. Do đó, $\mathbb{M}_n(R)$ là PP -vành phải với mọi n , nghĩa là mỗi idêan phải chính của vành ma trận $\mathbb{M}_n(R)$ là xạ ảnh. Vì vậy, R là vành nửa di truyền phải. $\square$

Kết quả sau là hệ quả của Định lý 2.2.1.

Hệ quả 2.2.2. *Cho R là vành. Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:*

- (1) *Vành R là nửa di truyền phải.*
- (2) *Mỗi môđun con hữu hạn sinh của R^n là giả xạ ảnh với mọi số nguyên dương n .*
- (3) *Mỗi idêan phải chính của $\mathbb{M}_n(R)$ là giả xạ ảnh với mọi số nguyên dương n .*

Theo kết quả của Puninski và Rothmaler (Mệnh đề 1.3.18), chúng ta kết luận rằng mỗi vành nửa di truyền phải và S -vành phải cũng là vành nửa di truyền trái và S -vành trái. Đặc trưng của lớp vành này thông qua tính giả xạ ảnh của môđun được trình bày trong định lý sau.

Định lý 2.2.3. *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R :*

- (1) *R là nửa di truyền phải và S -vành phải.*

(2) R là nửa di truyền trái và S -vành trái.

(3) Mỗi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun phải phẳng là giả xạ ảnh.

(4) Mỗi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun trái phẳng là giả xạ ảnh.

Chứng minh. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Theo Mệnh đề 1.3.18, mỗi vành nửa di truyền phải và S -vành phải cũng là vành nửa di truyền trái và S -vành trái và ngược lại.

(1) $\Rightarrow$ (3) Gọi K là môđun con hữu hạn sinh của R -môđun phải phẳng F . Vì R là vành nửa di truyền phải nên K là môđun phải phẳng bởi Định lý 1.3.20. Mặt khác, R cũng là S -vành phải nên mọi môđun hữu hạn sinh phải phẳng là giả xạ ảnh. Do đó, K là giả xạ ảnh.

(3) $\Rightarrow$ (1) Giả sử K là môđun con hữu hạn sinh của R -môđun xạ ảnh P . Vì mỗi môđun xạ ảnh là phẳng nên P là môđun phải phẳng. Áp dụng (3), ta có K là giả xạ ảnh. Theo Định lý 2.2.1, ta suy ra R là vành nửa di truyền phải.

Gọi M là R -môđun hữu hạn sinh phải. Vì mỗi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun phải phẳng là giả xạ ảnh nên M là giả xạ ảnh. Do đó, R là S -vành phải bởi vì Định lý 2.1.6.

(2) $\Leftrightarrow$ (4) Chứng minh tương tự như (1) $\Leftrightarrow$ (3). $\square$

Mở rộng Định lý 2.2.3, chúng tôi suy ra đặc trưng vành nửa di truyền và S -vành thông qua tính giả xạ ảnh của các môđun con hữu hạn sinh của môđun phải.

Hệ quả 2.2.4. Cho vành R . Khi đó, các phát biểu sau là tương đương:

(1) R là nửa di truyền và S -vành.

(2) Mỗi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun phải phẳng là giả xạ ảnh.

(3) Mỗi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun trái phẳng là giả xạ ảnh.

Chúng tôi cũng nghiên cứu đặc trưng vành nửa di truyền và Π -coherent thông qua tính giả xạ ảnh của môđun phải (trái) hữu hạn sinh xoắn và được kết quả sau.

Định lý 2.2.5. Các khẳng định sau là tương đương đối với vành R :

(1) R là nửa di truyền và Π -coherent.

(2) Mỗi R -môđun phải hữu hạn sinh xoắn là xạ ảnh.

(3) Mỗi R -môđun phải hữu hạn sinh xoắn là giả xạ ảnh.

(4) Mỗi R -môđun trái hữu hạn sinh xoắn là xạ ảnh.

(5) *Mỗi R -môđun trái hữu hạn sinh xoắn là giả xạ ảnh.*

Chứng minh. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Theo Định lý 1.3.21, R là nửa di truyền và Π -coherent tương đương với mỗi R -môđun phải hữu hạn sinh xoắn là xạ ảnh.

(2) $\Rightarrow$ (3) Nếu mỗi R -môđun hữu hạn sinh xoắn M là xạ ảnh thì M cũng là giả xạ ảnh.

(3) $\Rightarrow$ (2) Gọi M là R -môđun hữu hạn sinh xoắn và một toàn cấu $\eta : F \rightarrow M$ với F là R -môđun hữu hạn sinh tự do. Mà $F \oplus M$ cũng là môđun hữu hạn sinh xoắn, nên theo giả thiết, $F \oplus M$ là giả xạ ảnh. Vậy, M là xạ ảnh theo Mệnh đề 2.1.2.

(1) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5). Chứng minh tương tự như (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). $\square$

Định lý 2.2.1 cho thấy rằng một vành nửa di truyền có thể đặc trưng thông qua tính giả xạ ảnh của môđun con hữu hạn sinh của môđun xạ ảnh. Khi mở rộng điều kiện này cho môđun bất kỳ, chúng tôi thu được đặc trưng của vành di truyền.

Định lý 2.2.6. *Cho vành R . Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

(1) *Vành R là di truyền phải.*

(2) *Mỗi môđun con của R -môđun xạ ảnh là giả xạ ảnh.*

(3) *Mỗi idêan phải chính của $S = \text{End}(F)$ là giả xạ ảnh với F là R -môđun tự do.*

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Vì R là vành di truyền phải nên mỗi môđun con của môđun xạ ảnh là xạ ảnh. Vì vậy, mỗi môđun con của môđun xạ ảnh cũng là giả xạ ảnh.

(2) $\Rightarrow$ (1) Cho K là môđun con của R -môđun xạ ảnh P và $f : F \rightarrow K$ là một toàn cấu, trong đó F là R -môđun tự do. Vì $F \oplus K$ là môđun con của môđun xạ ảnh $F \oplus P$ nên $F \oplus K$ là giả xạ ảnh. Theo Mệnh đề 2.1.2, K là xạ ảnh. Vì vậy, R là vành di truyền phải.

(1) $\Rightarrow$ (3) Nếu F là R -môđun tự do thì mỗi idêan phải chính của vành tự đồng cấu $\text{End}(F)$ là xạ ảnh theo Định lý 1.3.16. Do đó, mỗi idêan phải chính của vành tự đồng cấu $\text{End}(F)$ cũng là giả xạ ảnh.

(3) $\Rightarrow$ (1) Với F là R -môđun tự do, ta có $F \oplus F$ là môđun tự do sao cho $\text{End}(F \oplus F) \cong \mathbb{M}_2(\text{End}(F))$. Từ (3) suy ra mỗi idêan phải chính của $\text{End}(F \oplus F)$ là giả xạ ảnh. Áp dụng Định lý 2.1.7, ta suy ra vành $\text{End}(F)$ là PP -vành phải. Do đó, mỗi idêan phải chính của $\text{End}(F)$ là xạ ảnh. Vậy, R là vành di truyền phải. $\square$

Mệnh đề 1.3.23 cho ta kết luận rằng mỗi vành hoàn chỉnh phải và di truyền phải cũng là vành hoàn chỉnh trái và di truyền trái. Ngoài ra, trong Định lý 2.2.6,

nếu thay môđun xạ ảnh bằng môđun phẳng thì chúng tôi chứng minh được rằng các vành di truyền và nửa nguyên sơ có thể được đặc trưng thông qua tính giả xạ ảnh của môđun con của môđun phẳng.

Định lý 2.2.7. *Các phát biểu sau là tương đương đối với vành R :*

- (1) R là di truyền và nửa nguyên sơ.
- (2) R là hoàn chỉnh phải và di truyền phải.
- (3) R là hoàn chỉnh trái và di truyền trái.
- (4) Mỗi môđun con của R -môđun phải phẳng là giả xạ ảnh.
- (5) Mỗi môđun con của R -môđun trái phẳng là giả xạ ảnh.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Hiển nhiên vì mỗi vành nửa nguyên sơ là vành hoàn chỉnh phải (trái).

(2) $\Rightarrow$ (1) Vành R là di truyền phải nên mỗi idêan phải chính của vành R là xạ ảnh. Vành hoàn chỉnh phải R có mỗi idêan phải chính là xạ ảnh nên theo Mệnh đề 1.3.23, R là vành nửa nguyên sơ và di truyền trái. Vậy, R là vành di truyền và nửa nguyên sơ.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Theo Mệnh đề 1.3.23, hai điều kiện này tương đương.

(2) $\Rightarrow$ (4) Giả sử N là môđun con của R -môđun phải phẳng M . Vì R là vành hoàn chỉnh phải nên M là xạ ảnh. Do R cũng là vành di truyền phải nên áp dụng Định lý 2.2.6 ta được N là giả xạ ảnh.

(4) $\Rightarrow$ (2) Gọi N là môđun con của R -môđun phải xạ ảnh M . Do mỗi môđun xạ ảnh là phẳng nên M là môđun phẳng. Suy ra N là giả xạ ảnh bởi vì (4). Theo Định lý 2.2.6, R là vành di truyền phải. Theo (4), mỗi môđun phải phẳng là giả xạ ảnh. Do đó, R là vành hoàn chỉnh phải.

(3) $\Leftrightarrow$ (5) Chứng minh tương tự như (2) $\Leftrightarrow$ (4). □

Theo kết quả Định lý 2.2.5, mỗi R -môđun phải hữu hạn sinh xoắn là giả xạ ảnh khi và chỉ khi vành R là nửa di truyền và Π -coherent. Một cách tương tự, nghiên cứu đặc trưng vành mà mỗi môđun phải (trái) xoắn là giả xạ ảnh, chúng tôi thu được kết quả:

Định lý 2.2.8. *Cho R là vành. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

- (1) R là di truyền và nửa nguyên sơ.
- (2) Mỗi R -môđun phải xoắn là xạ ảnh.

(3) Mỗi R -môđun trái xoắn là xạ ảnh.

(4) Mỗi R -môđun phải xoắn là giả xạ ảnh.

(5) Mỗi R -môđun trái xoắn là giả xạ ảnh.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Vì vành R là di truyền và nửa nguyên sơ nên R cũng là vành coherent trái và hoàn chỉnh phải. Theo Định lý 2.1.9, tích trực tiếp một họ bất kỳ các bản sao của R là R -môđun xạ ảnh. Hơn nữa, vì R là vành di truyền phải nên mọi môđun con của tích trực tiếp một họ bất kỳ các bản sao của R là xạ ảnh. Do đó, mỗi R -môđun xoắn là xạ ảnh.

(2) $\Rightarrow$ (4) Vì mỗi R -môđun xoắn là xạ ảnh nên mỗi R -môđun xoắn cũng là giả xạ ảnh.

(4) $\Rightarrow$ (2) Gọi M là R -môđun xoắn và một toàn cấu $\eta : F \rightarrow M$ với F là R -môđun tự do. Mà $F \oplus M$ là môđun xoắn nên $F \oplus M$ là giả xạ ảnh (do (4)). Vậy, M là xạ ảnh.

(2) $\Rightarrow$ (1) Đặt $M = R^I$ với I là một tập nào đó, ta có M là môđun xoắn. Từ giả thiết, suy ra M là xạ ảnh. Áp dụng Định lý 2.1.9, ta có R là vành hoàn chỉnh phải. Gọi H là môđun con của môđun xạ ảnh P . Vì P là xạ ảnh nên $P \hookrightarrow R^{(I)}$ với I là một tập nào đó. Do đó, $H \hookrightarrow R^I$, từ đó suy ra H là môđun xoắn. Theo (2), H là xạ ảnh. Vì vậy, R cũng là vành di truyền phải. Theo Định lý 2.2.7, R là vành di truyền và nửa nguyên sơ.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (5) Chứng minh tương tự như (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (4). $\square$

2.3. Môđun giả xạ ảnh trên vành nửa địa phương và vành Artin idêan chính

Phần này trình bày đặc trưng vành nửa địa phương thông qua tính giả xạ ảnh của môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy. Hơn nữa, đặc trưng của vành mà lớp môđun giả nội xạ trùng với lớp môđun giả xạ ảnh cũng được chúng tôi nghiên cứu. Các kết quả chính của phần này là Định lý 2.3.2, Định lý 2.3.3.

Bổ đề sau cho thấy rằng tính chất giả xạ ảnh của môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy được bảo toàn khi chuyển sang vành thương.

Bổ đề 2.3.1. *Nếu mỗi R -môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy là giả xạ ảnh thì vành thương của R cũng có tính chất này.*

Chứng minh. Gọi S là vành thương của R và M là S -môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy. Khi đó, M cũng là R -môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy. Vì mỗi

R -môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy là giả xạ ảnh nên M là R -môđun giả xạ ảnh. Vì vậy, M là S -môđun giả xạ ảnh. $\square$

Tiếp theo, chúng tôi trình bày đặc trưng vành nửa địa phương thông qua tính giả xạ ảnh của môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy.

Định lý 2.3.2. *Các phát biểu sau là tương đương đối với vành R đã cho:*

- (1) R là nửa địa phương.
- (2) Mỗi R -môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy là môđun Artin.
- (3) Mỗi R -môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy là giả xạ ảnh.

Ngoài ra, nếu điều kiện (1) được thỏa mãn thì ba điều kiện trên cũng tương đương khi xét trên các R -môđun trái.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Gọi M là R -môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy, ta sẽ chứng minh M là môđun Artin bằng phương pháp quy nạp theo số phần tử sinh của M . Giả sử M được sinh bởi n phần tử. Với $n = 1$, M là môđun xyclic, suy ra tồn tại idêan phải K của R sao cho $M \cong R/K$. Vì M là môđun nửa nguyên thủy nên $\text{Rad}(M) = 0$, suy ra $J(R/K) = 0$ hay $J(R) \leq K$. Từ đó dẫn đến $R/K \cong (R/J(R))/(K/J(R))$. Mà R là vành nửa địa phương nên $R/J(R)$ là vành Artin nửa đơn. Do đó, R/K là môđun Artin nửa đơn. Vì vậy, $M \cong R/K$ là môđun Artin. Giả sử mỗi R -môđun nửa nguyên thủy được sinh bởi $n = k$ phần tử là môđun Artin. Ta sẽ chứng minh R -môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy

$$M = m_1R + m_2R + \cdots + m_{k+1}R$$

là môđun Artin. Xét dãy khớp ngắn như sau:

$$0 \rightarrow m_1R \rightarrow M \rightarrow M/m_1R \rightarrow 0.$$

Theo giả thiết quy nạp, m_1R và M/m_1R là các môđun Artin. Từ đó suy ra M là môđun Artin. Theo nguyên lý quy nạp, môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy M là môđun Artin.

(2) $\Rightarrow$ (3) Giả sử M là R -môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy. Theo (2), ta suy ra M là môđun Artin. Do đó, M là giả xạ ảnh.

(3) $\Rightarrow$ (1) Đặt $\bar{R} = R/J(R)$, ta cần chứng minh $\bar{R}$ là vành Artin nửa đơn, tức là chứng minh mỗi $\bar{R}$ -môđun đơn là xạ ảnh. Gọi S là $\bar{R}$ -môđun đơn và đặt $M = \bar{R}_{\bar{R}} \oplus S$. Khi đó, M là $\bar{R}$ -môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy. Theo (3), có thể kết luận rằng M là $\bar{R}$ -môđun giả xạ ảnh. Áp dụng Bổ đề 2.3.1, M là $\bar{R}$ -môđun giả xạ ảnh. Mà S là ảnh toàn cấu của $\bar{R}_{\bar{R}}$ nên theo Bổ đề 1.2.7, toàn cấu $f : \bar{R}_{\bar{R}} \rightarrow S$

chẻ ra. Do đó, S là $\bar{R}$ -môđun xạ ảnh. Vì vậy, $\bar{R}$ là vành Artin nửa đơn, dẫn đến R là vành nửa địa phương. $\square$

Như đã biết, các tác giả Faith và Walker đã chứng minh rằng: Một vành là tựa Frobenius nếu và chỉ nếu hai lớp môđun nội xạ và xạ ảnh trùng nhau. Ngoài ra, các kết quả của Fuller, Faith và Byrd (Định lý 1.3.27) cho ta biết rằng trên vành Artin idêan chính, lớp môđun tựa xạ ảnh trùng với lớp môđun đối ngẫu. Từ đó, chúng tôi hướng đến việc xác định điều kiện để lớp môđun giả xạ ảnh trùng với lớp môđun giả nội xạ. Kết quả này được trình bày trong định lý cuối cùng của chương.

Định lý 2.3.3. *Cho vành R . Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

- (1) *Vành R là Artin idêan chính.*
- (2) *Mỗi R -môđun phải giả xạ ảnh là tựa nội xạ.*
- (3) *Mỗi R -môđun phải giả xạ ảnh là giả nội xạ.*
- (4) *Mỗi R -môđun phải giả nội xạ là tựa xạ ảnh.*
- (5) *Mỗi R -môđun phải giả nội xạ là giả xạ ảnh.*

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Gọi M là R -môđun giả xạ ảnh. Vì R là vành Artin idêan chính nên R cũng là vành Artin chuỗi. Theo Mệnh đề 1.3.30, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, trong đó mỗi R -môđun M_i là chuỗi cyclic. Vì mỗi M_i là môđun không tích được và R là vành Artin idêan chính, nên theo Định lý 1.3.29, mỗi môđun M_i là tựa xạ ảnh, tức là M_i là M_i -xạ ảnh với mọi $i \in I$. Mặt khác, M là giả xạ ảnh nên M_i là M_j -xạ ảnh với mọi $i \neq j$, $i, j \in I$. Mỗi M_i là môđun hữu hạn sinh nên M_i là $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ -xạ ảnh. Từ đó suy ra $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ là $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ -xạ ảnh hay M là tựa xạ ảnh. Theo Định lý 1.3.27, M là tựa nội xạ.

(2) $\Rightarrow$ (3) Hiển nhiên vì mỗi môđun tựa nội xạ là giả nội xạ.

(3) $\Rightarrow$ (1) Gọi T là vành thương của R . Vì R thỏa mãn điều kiện (3) nên vành thương T cũng thỏa mãn điều kiện (3). Gọi P là T -môđun xạ ảnh, xét T -môđun $M = P \oplus P$. Khi đó, M là T -môđun xạ ảnh. Từ đó dẫn đến M là T -môđun giả xạ ảnh. Suy ra M là T -môđun giả nội xạ. Do đó, P là P -nội xạ hay P là T -môđun tựa nội xạ. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh T là vành tựa Frobenius, tức là chứng minh mỗi T -môđun xạ ảnh Q là nội xạ. Thật vậy, gọi A là T -môđun xạ ảnh bất kỳ, suy ra $A \oplus Q$ là T -môđun xạ ảnh. Theo kết quả vừa chứng minh, $A \oplus Q$ là T -môđun tựa nội xạ. Áp dụng Mệnh đề 1.2.8 ta được Q là T -môđun nội xạ. Vậy, R là vành Artin idêan chính bởi Định lý 1.3.27.

(1) $\Rightarrow$ (4) Giả sử R là vành Artin idêan chính và M là môđun giả nội xạ. Khi đó, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, mỗi môđun M_i là chuỗi xyclic. Ta chứng minh M là tựa nội xạ. Môđun M là giả nội xạ nên $\bigoplus_{i \in I \setminus \{j\}} M_i$ là M_j -nội xạ. Vì R là vành Artin idêan chính nên theo Định lý 1.3.29, suy ra rằng mỗi môđun không phân tích được M_j là tựa nội xạ với mọi $j \in I$. Vì vậy, với mọi $j \in I$, ta có M_j là tựa nội xạ và $\bigoplus_{i \in I \setminus \{j\}} M_i$ là M_j -nội xạ. Do đó, theo Mệnh đề 1.2.4, suy ra M là tựa nội xạ. Mặt khác, vành R là Artin idêan chính nên áp dụng Định lý 1.3.27 ta được môđun tựa nội xạ M cũng là tựa xạ ảnh.

(4) $\Rightarrow$ (5) Hiển nhiên vì mỗi môđun tựa xạ ảnh là giả xạ ảnh.

(5) $\Rightarrow$ (1) Chứng minh tương tự như (3) $\Rightarrow$ (1). $\square$

Kết quả dưới đây là một hệ quả trực tiếp của Định lý 2.3.3. Hệ quả này đưa ra cấu trúc của vành Artin idêan chính thông qua mối quan hệ giữa lớp môđun giả nội xạ và giả xạ ảnh.

Hệ quả 2.3.4. *Các phát biểu sau là tương đương đối với vành R :*

- (1) *Vành R là Artin idêan chính.*
- (2) *Lớp R -môđun phải giả nội xạ trùng với lớp R -môđun phải giả xạ ảnh.*
- (3) *Lớp R -môđun trái giả nội xạ trùng với lớp R -môđun trái giả xạ ảnh.*

KẾT LUẬN CỦA CHƯƠNG 2

Trong chương này, chúng tôi đã đưa ra đặc trưng của một số lớp vành cổ điển.

Trong phần đầu của chương, chúng tôi chứng minh rằng một vành là hoàn chỉnh phải khi và chỉ khi tổng trực tiếp của môđun nửa đơn và môđun tự do có phủ giả xạ ảnh (Định lý 2.1.5). Chúng tôi cũng kết luận một vành là S -vành phải nếu và chỉ nếu mỗi môđun hữu hạn sinh phẳng là giả xạ ảnh trong Định lý 2.1.6. Đối với PP -vành phải, chúng tôi chỉ ra rằng một vành là PP -vành phải khi và chỉ khi mỗi idêan phải chính của vành các ma trận vuông cấp hai trên nó sinh bởi ma trận chéo là giả xạ ảnh (Định lý 2.1.7). Trong Định lý 2.1.9, chúng tôi xác định đặc trưng của vành coherent trái và hoàn chỉnh phải. Đó là lớp vành mà tích trực tiếp của các môđun xạ ảnh là giả xạ ảnh, điều này cũng tương đương với tích trực tiếp của các môđun phẳng là giả xạ ảnh.

Trong phần thứ hai của chương, chúng tôi mô tả đặc trưng của vành nửa di truyền trong Định lý 2.2.1. Theo đó, một vành là nửa di truyền phải khi và chỉ khi mỗi môđun con hữu hạn sinh của môđun xạ ảnh là giả xạ ảnh. Chúng tôi cũng chứng minh rằng một vành là nửa di truyền phải và S -vành phải nếu và chỉ nếu mỗi môđun con hữu hạn sinh của môđun phải (trái) phẳng là giả xạ ảnh (Định

lý 2.2.3). Trong trường hợp vành nửa di truyền và Π -coherent, đặc trưng của lớp vành này là mỗi môđun phải (trái) hữu hạn sinh xoắn là giả xạ ảnh (Định lý 2.2.5). Trong Định lý 2.2.6, chúng tôi chứng minh một vành là di truyền phải nếu và chỉ nếu mọi môđun con của môđun xạ ảnh là giả xạ ảnh. Ngoài ra, mỗi vành di truyền và nửa nguyên sơ cũng là vành hoàn chỉnh phải và di truyền phải, với đặc trưng là mỗi môđun con của môđun phải (trái) phẳng là giả xạ ảnh; điều này cũng tương đương với mỗi môđun phải (trái) xoắn là giả xạ ảnh (Định lý 2.2.7, Định lý 2.2.8).

Trong phần cuối của chương, chúng tôi chứng minh rằng một vành là nửa địa phương khi và chỉ khi mỗi môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy là giả xạ ảnh (Định lý 2.3.2). Kết quả cuối cùng của chúng tôi trong chương này là đặc trưng của lớp vành Artin idêan chính. Đó là lớp vành mà mỗi môđun giả xạ ảnh là giả nội xạ và ngược lại (Định lý 2.3.3).

CHƯƠNG 3. LỚP A -VÀNH VÀ TỔNG QUÁT HÓA

Trong chương này, chúng tôi sẽ nghiên cứu lớp vành mà mọi idêan phải là bất biến đẳng cấu với điều kiện I -hữu hạn. Chúng tôi định nghĩa lớp vành mà trong đó mọi idêan phải là bất biến lũy linh và gọi là n -vành phải. Một số tính chất và cấu trúc của lớp vành này cũng được nghiên cứu. Phần này được viết trong [41] và [48].

3.1. Lớp a -vành phải

Trong phần này, chúng tôi trình bày cấu trúc của lớp a -vành phải I -hữu hạn. Sử dụng kết quả này, chúng tôi nghiên cứu các vành không phân tích được a -vành phải I -hữu hạn thông qua điều kiện hoán vị Nakayama. Từ đó, chúng tôi xác định điều kiện để lớp a -vành phải I -hữu hạn là vành tựa Frobenius. Các kết quả chính của phần này là Định lý 3.1.4 và Định lý 3.1.13.

3.1.1. Lớp a -vành phải I -hữu hạn

Mối quan hệ giữa vành I -hữu hạn bất biến đẳng cấu phải và vành nửa hoàn chỉnh được trình bày trong bổ đề sau.

Bổ đề 3.1.1. *Nếu R là vành I -hữu hạn bất biến đẳng cấu phải thì R là vành nửa hoàn chỉnh.*

Chứng minh. Gọi e là phần tử lũy đẳng nguyên thủy của vành R . Khi đó, eR là môđun không phân tích được. Vì R là vành bất biến đẳng cấu phải nên eR là môđun bất biến đẳng cấu. Do đó, $\text{End}(eR)$ là vành địa phương, suy ra e là phần tử lũy đẳng địa phương của R . Vậy, R là vành nửa hoàn chỉnh. $\square$

Sử dụng kết quả của Bổ đề 3.1.1, chúng tôi xác định đặc trưng của phần tử lũy đẳng nguyên thủy có chỉ số ít nhất 2 trong sự phân tích của a -vành phải I -hữu hạn.

Bổ đề 3.1.2. *Nếu phần tử lũy đẳng nguyên thủy e của a -vành phải I -hữu hạn R có chỉ số ít nhất 2 thì eR là môđun đơn.*

Chứng minh. Giả sử R là a -vành phải I -hữu hạn và do đó R là vành nửa hoàn chỉnh theo Bổ đề 3.1.1. Vì e là phần tử lũy đẳng nguyên thủy của vành R có chỉ

số ít nhất 2 nên tồn tại phần tử lũy đẳng $e' \in R$ sao cho $eR \cap e'R = 0$ và $eR \cong e'R$. Áp dụng Bổ đề 1.3.42, suy ra eR là môđun nửa đơn. Mặt khác, do e là phần tử lũy đẳng nguyên thủy nên eR là môđun không phân tích được. Vậy, eR là môđun đơn. $\square$

Mỗi q -vành phải là a -vành phải. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng trong trường hợp tổng quát, vì tồn tại ví dụ chỉ ra rằng một a -vành phải không nhất thiết là q -vành phải [27, Example 2.2]. Dựa trên kết quả của Bổ đề 3.1.2, chúng tôi xác định điều kiện để lớp q -vành phải và lớp a -vành phải trùng nhau.

Hệ quả 3.1.3. *Cho R là vành I -hữu hạn sao cho mỗi phần tử lũy đẳng nguyên thủy của R có chỉ số ít nhất 2. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

- (1) *Vành R là Artin nửa đơn.*
- (2) *R là q -vành phải.*
- (3) *R là a -vành phải.*

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) Hiển nhiên.

(3) $\Rightarrow$ (1) Vì R là vành I -hữu hạn nên $R = e_1R \oplus e_2R \oplus \cdots \oplus e_mR$, trong đó e_i , $i = 1, 2, \dots, m$ là các phần tử lũy đẳng nguyên thủy của R . Theo Bổ đề 3.1.2, e_iR là môđun đơn với mọi $i = 1, 2, \dots, m$. Do đó, R là vành Artin nửa đơn. $\square$

Như đã biết, mỗi a -vành phải có thể được phân tích thành tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn chính phương đầy đủ và một vành không chính phương phải [27, Theorem 3.4]. Chúng tôi sẽ trình bày sự phân tích của lớp a -vành phải không chứa một tập vô hạn các phần tử lũy đẳng trực giao trong định lý sau.

Định lý 3.1.4. *Mỗi a -vành phải I -hữu hạn R là tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn và một vành nửa hoàn chỉnh cơ sở.*

Chứng minh. Giả sử R là a -vành phải I -hữu hạn. Vì R là bất biến đẳng cấu phải và I -hữu hạn nên theo Bổ đề 3.1.1, R là vành nửa hoàn chỉnh. Khi đó, tồn tại một họ các phần tử lũy đẳng địa phương trực giao $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ sao cho $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_m$. Nếu $e_iR \not\cong e_jR$ với mọi $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ thì $e_iR/e_iJ(R) \not\cong e_jR/e_jJ(R)$ với mọi $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Do đó, tập hợp $\{e_iR/e_iJ(R) \mid 1 \leq i \leq m\}$ là một tập đại diện đầy đủ các lớp đẳng cấu của các R -môđun đơn. Vậy, ta được điều cần chứng minh. Giả sử tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ sao cho e_i là phần tử lũy đẳng địa phương của R và có chỉ số ít nhất 2. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ là các phần tử lũy đẳng địa phương có chỉ số ít nhất 2. Đặt $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. Khi đó, e là phần tử lũy đẳng của R và $eR = e_1R \oplus e_2R \oplus \cdots \oplus e_nR$. Do đó, $R = eR \oplus (1 - e)R$. Tiếp theo, chứng minh eR và $(1 - e)R$ là các idêan của

R bằng cách chứng minh rằng $eR(1 - e) = 0$ và $(1 - e)Re = 0$ (nghĩa là e là phần tử lũy đẳng tâm).

Nếu $(1 - e)Re \neq 0$ thì tồn tại $t \in R$ thỏa mãn $(1 - e)te \neq 0$. Khi đó, tồn tại các phần tử lũy đẳng nguyên thủy e_j và e_k sao cho $e_jR \cong e_iR, e_kR \not\cong e_iR$ với $j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $e_j \in eR, e_k \in (1 - e)R$ và $e_kte_j \neq 0$. Xét ánh xạ $\alpha : e_jR \rightarrow e_kR$ sao cho $\alpha(e_jr) = e_kte_jr$ với mọi $r \in R$. Suy ra α là đồng cấu khác không. Mà e_jR là môđun đơn nên α là đơn cấu. Vì R là a -vành phải nên $e_jR \oplus e_kR$ là môđun bất biến đẳng cấu phải, suy ra e_jR là e_kR -nội xạ. Do đó, đơn cấu α chẻ ra. Bởi vì e_kR cũng là môđun không phân tích được nên α là đẳng cấu. Suy ra e_kR là môđun đơn và $e_jR \cong e_kR$, mâu thuẫn. Do đó $(1 - e)Re = 0$.

Giả sử $eR(1 - e) \neq 0$, suy ra tồn tại $u \in R$ sao cho $eu(1 - e) \neq 0$. Do đó, tồn tại các phần tử lũy đẳng nguyên thủy e_p và e_q của R thỏa mãn $e_pR \cong e_iR, e_qR \not\cong e_iR$ trong đó $p, q \in \{1, 2, \dots, m\}$, $e_p \in eR, e_q \in (1 - e)R$ và $e_pue_q \neq 0$. Xét ánh xạ $\beta : e_qR \rightarrow e_pR$ xác định bởi $\beta(e_qr) = e_pue_qr$ với $r \in R$. Do e_pR là môđun đơn nên suy ra β là toàn cấu khác không. Vì e_pR là môđun xạ ảnh nên toàn cấu β chẻ ra, suy ra $\text{Ker}(\beta) \leq^\oplus e_qR$. Ngoài ra, e_qR là môđun không phân tích được nên $\text{Ker}(\beta) = 0$, dẫn đến $e_qR \cong e_pR$, mâu thuẫn. Từ đó suy ra $eR(1 - e) = 0$.

Vì vậy, eR là vành Artin nửa đơn và $(1 - e)R$ là vành nửa hoàn chỉnh cơ sở. $\square$

Sử dụng định lý trên, chúng ta có kết quả sau.

Hệ quả 3.1.5. *Nếu R là a -vành phải sao cho mỗi dãy $r(a_1) \subseteq r(a_2a_1) \subseteq \dots$ là dừng với các phần tử $a_1, a_2, \dots$ trong R thì R là tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn và một vành nửa hoàn chỉnh cơ sở.*

Ví dụ dưới đây chứng tỏ rằng một vành bất biến đẳng cấu phải nửa hoàn chỉnh cơ sở không là a -vành phải.

Ví dụ 3.1.6. Cho trường $\mathbb{F}$. Gọi R là vành các ma trận có dạng

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f & g & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix}$$

với $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{F}$. Theo [20, Example 1.6], R là vành bất biến đẳng cấu phải

nửa hoàn chỉnh cơ sở. Xét idêan phải I của R có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f & g & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g \end{pmatrix}.$$

Ta kiểm tra được I là idêan phải cốt yếu của R và nó không bất biến qua phần tử khả nghịch của R . Từ đó suy ra R không là a -vành phải bởi Bổ đề 1.3.41.

Trong Định lý 3.1.4, nếu điều kiện a -vành phải được thay thế bởi điều kiện yếu hơn là vành bất biến đẳng cấu phải thì chúng tôi cũng mô tả được sự phân tích của lớp vành này.

Mệnh đề 3.1.7. *Mỗi vành bất biến đẳng cấu phải I -hữu hạn là tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn và một vành mà mọi idêan phải đơn là lũy linh.*

Chứng minh. Gọi R là vành bất biến đẳng cấu phải I -hữu hạn. Khi đó, R là vành nửa hoàn chỉnh. Do đó, tồn tại các phần tử lũy đẳng nguyên thủy trực giao e_i , $i = 1, 2, \dots, m$ sao cho $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_m$. Giả sử $e_i R$ là môđun đơn với $1 \leq i \leq n$ và $e_j R$ không là môđun đơn với $j > n$. Đặt $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$. Theo chứng minh của Định lý 3.1.4, $(1 - e)Re = 0 = eR(1 - e)$, do đó e là phần tử lũy đẳng tâm của R và $S = eR$ là vành Artin nửa đơn. Xét $T = (1 - e)R$ và gọi I là idêan phải đơn của T . Khi đó, tồn tại phần tử lũy đẳng f của T sao cho $I = fR$. Vì $e \neq 1$ nên $fR(1 - e) \neq 0$, suy ra tồn tại $j > n$ sao cho $fRe_j \neq 0$. Lấy $0 \neq x \in fRe_j$ và xét đồng cấu $\varphi : e_j R \rightarrow fR$ xác định bởi $\varphi(e_j t) = xe_j t$ với mọi $t \in R$. Mà fR là idêan phải đơn nên φ là toàn cấu. Hơn nữa, vì e_j là phần tử lũy đẳng nguyên thủy nên $e_j R$ là môđun không phân tích được, suy ra $\text{Ker}(\varphi) = 0$. Do đó, φ là đẳng cấu, điều này mâu thuẫn vì $e_j R$ không là môđun đơn. Vậy, $I^2 = 0$ hay mọi idêan phải đơn của T là lũy linh. $\square$

Sử dụng Mệnh đề 3.1.7, chúng tôi mô tả cấu trúc vành bất biến đẳng cấu phải I -hữu hạn trong trường hợp phần tử đơn vị phân tích được thành tổng các phần tử lũy đẳng nguyên thủy trực giao.

Hệ quả 3.1.8. *Nếu R là vành bất biến đẳng cấu phải I -hữu hạn sao cho $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_m$, trong đó e_i , $1 \leq i \leq m$ là các phần tử lũy đẳng nguyên thủy trực giao thì tồn tại $i \in \{1, \dots, m\}$ sao cho $e_i R$ là môđun đơn hoặc $\text{Soc}(R_R)^2 = 0$.*

Chứng minh. Giả sử $e_i R$ không là môđun đơn với mọi $1 \leq i \leq m$. Theo Mệnh đề 3.1.7, mọi idêan phải đơn của vành R là lũy linh. Gọi S, K là các idêan phải đơn của R . Nếu $SK = S$ thì $(SK)K = S$. Từ đó dẫn đến $S = 0$, mâu thuẫn. Do đó, $SK = 0$ hay $\text{Soc}(R_R)^2 = 0$. Vậy, tồn tại $i \in \{1, \dots, m\}$ sao cho $e_i R$ là môđun đơn hoặc $\text{Soc}(R_R)^2 = 0$. $\square$

3.1.2. Lớp a -vành phải nửa hoàn chỉnh có đế cốt yếu

Trong phần này, chúng tôi xét R là a -vành phải I -hữu hạn sao cho mỗi idêan phải cực tiểu là linh hóa tử phải, $\text{Soc}(R_R) = \text{Soc}({}_R R) = S \leq^e R_R$. Theo Bổ đề 3.1.1, R là vành nửa hoàn chỉnh. Do đó, tồn tại các phần tử lũy đẳng địa phương trực giao $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ sao cho $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_m$. Giả sử $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ với $n \leq m$ là tập lũy đẳng cơ sở của R . Chúng tôi sẽ nghiên cứu a -vành phải I -hữu hạn không phân tích được thông qua hoán vị Nakayama và đi đến kết luận điều kiện đủ để lớp vành này là tựa Frobenius.

Bổ đề 3.1.9. *Cho vành R . Khi đó,*

- (1) *Nếu xR là idêan phải cực tiểu của R thì $l_{Rr_R}(x) = Rx$ và Rx là idêan trái cực tiểu của R .*
- (2) *Nếu Ry là idêan trái cực tiểu của R thì yR là idêan phải cực tiểu của R và $l_{Rr_R}(Ry) = Ry$.*
- (3) *$\text{Soc}(e_i R)$ và $\text{Soc}(R e_i)$ là các idêan đơn của R với mọi $i = 1, 2, \dots, m$.*
- (4) *R_R là hữu hạn đối sinh.*
- (5) *Vành R là tự nội xạ phải.*

Chứng minh. (1) Nếu xR là idêan phải cực tiểu của R thì suy ra $r_R(x)$ là idêan phải cực đại của R . Ta có $Rx \leq l_{Rr_R}(x)$. Lấy $0 \neq t \in l_{Rr_R}(x)$, suy ra $r_R(x) \leq r_R(t)$. Do $r_R(x)$ là idêan phải cực đại nên $r_R(x) = r_R(t)$. Từ đó dẫn đến $Rx = Rt$ bởi Bổ đề 1.3.37. Suy ra $t \in Rx$ và do đó $l_{Rr_R}(x) \leq Rx$. Vì vậy, $l_{Rr_R}(x) = Rx$. Theo giả thiết $\text{Soc}(R_R) = \text{Soc}({}_R R)$ nên tồn tại idêan trái cực tiểu Ry của R sao cho $Ry \leq Rx$. Do đó, $r_R(x) \leq r_R(y)$. Từ tính cực đại của $r_R(x)$ suy ra $r_R(x) = r_R(y)$, dẫn đến $Rx = Ry$. Vậy, Rx là idêan trái cực tiểu của R .

(2) Nếu Ry là idêan trái cực tiểu của R thì $l_R(y)$ là idêan trái cực đại của R . Với mọi $0 \neq yr \in yR$, $r \in R$, ta có $l_R(y) \leq l_R(yr)$. Theo tính cực đại của $l_R(y)$ ta được $l_R(y) = l_R(yr)$. Vì yrR chứa một idêan phải cực tiểu mR của R nên $l_R(yr) \leq l_R(m)$. Vì vậy, $l_R(y) = l_R(m) = l_R(yr)$. Mỗi idêan phải cực tiểu là linh hóa tử phải nên dẫn đến $y \in r_R l_R(y) = r_R l_R(m) = r_R l_R(mR) = mR \leq yrR$. Do đó, $y \in yrR$ hay

$yR \leq yrR$. Vì vậy, $yrR = yR$ hay yR là idêan phải cực tiểu của R . Từ đó suy ra Ry là một linh hóa tử trái bởi (1).

(3) Với mọi $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, gọi kR là idêan phải cực tiểu của e_iR . Khi đó, Rk là idêan trái cực tiểu của R , nên $l_R(k)$ là idêan trái cực đại của R . Do đó, $l_R(kR) \geq R(1 - e_i)$. Theo định nghĩa của $J(R)$ suy ra $l_R(kR) = l_R(k) \geq J(R)$. Từ đó dẫn đến $J(R) + R(1 - e_i) \leq l_R(kR)$. Mặt khác, $R/(J(R) + R(1 - e_i)) \cong Re_i/J(R)e_i$ và $Re_i/J(R)e_i$ là môđun đơn nên $J(R) + R(1 - e_i)$ là idêan trái cực đại. Do đó, $l_R(kR) = J(R) + R(1 - e_i)$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} kR &= r_R l_R(kR) = r_R[J(R) + R(1 - e_i)] = r_R(J(R)) \cap r_R(R(1 - e_i)) \\ &= r_R(J(R)) \cap e_iR = \text{Soc}(R_R) \cap e_iR = \text{Soc}(e_iR). \end{aligned}$$

Vì vậy, $\text{Soc}(e_iR)$ là idêan phải đơn của R với mọi $i = 1, 2, \dots, m$.

Tương tự chứng minh trên, $\text{Soc}(Re_i)$ là idêan trái đơn của R với mọi $i = 1, 2, \dots, m$.

(4) Vì $\text{Soc}(R_R) = \bigoplus_{i=1}^m \text{Soc}(e_iR)$ và $\text{Soc}(e_iR)$ là idêan phải đơn với mọi $i = 1, 2, \dots, m$ nên $\text{Soc}(R_R)$ là hữu hạn đối sinh. Mà $\text{Soc}(R_R) \leq^e R_R$ nên ta được R_R là hữu hạn đối sinh.

(5) Theo (3), $\text{Soc}(e_iR)$ là idêan phải đơn của R với mọi $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Vì $\text{Soc}(e_iR) \leq^e e_iR$ nên e_iR là môđun có chiều đều là 1 hay e_iR là môđun đều với mọi $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Vì e_i là phần tử lũy đẳng địa phương nên e_iR là môđun không phân tích được với mọi $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Do đó, e_iR là môđun CS với mọi $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Mặt khác, vì $R = e_1R \oplus e_2R \oplus \dots \oplus e_mR$ và R cũng là vành bất biến đẳng cấu phải nên R là vành tự nội xạ phải bởi Mệnh đề 1.2.5. $\square$

Như vậy, nếu mỗi a -vành phải I -hữu hạn R có idêan phải cực tiểu là linh hóa tử phải, để phải và để trái của vành trùng nhau, để phải là môđun con cốt yếu trong R_R thì vành đã cho là tự nội xạ phải. Hơn nữa, chúng tôi cũng xác định điều kiện đủ để lớp vành này là vành tựa Frobenius. Trước khi trình bày kết quả chính như vừa đề cập, chúng tôi giới thiệu các bổ đề sau để chứng minh kết quả chính.

Bổ đề 3.1.10. *Nếu e và f là hai phần tử lũy đẳng trực giao của vành R thì $eRf \subseteq \text{Soc}(R_R)$.*

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra $eR \cap fR = 0$. Nếu $eRf = 0$ thì ta được $eRf \subseteq \text{Soc}(R_R)$. Ngược lại, giả sử $0 \neq exf \in eRf$ với $x \in R$ nào đó. Xét đồng cấu khác không $\alpha : fR \rightarrow eR$, trong đó $\alpha(fr) = exfr$, $r \in R$. Theo Bổ đề 1.3.42, $\text{Im}(\alpha) = exfR$ là môđun nửa đơn. Từ đó suy ra $exf \in \text{Soc}(R_R)$. Vậy, $eRf \subseteq \text{Soc}(R_R)$. $\square$

Cho R là vành nửa hoàn chỉnh với tập lũy đẳng cơ sở $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Hoán vị σ của $\{1, 2, \dots, n\}$ được gọi là *hoán vị Nakayama* của R nếu

$$\text{Soc}(Re_{\sigma(i)}) \cong Re_i/J(R)e_i \text{ và } \text{Soc}(e_iR) \cong e_{\sigma(i)}R/e_{\sigma(i)}J(R)$$

với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Mọi vành tựa Frobenius có hoán vị Nakayama [34, pp. 56-57].

Bổ đề 3.1.11. *Nếu R là vành không phân tích được có các phần tử lũy đẳng không tầm thường thì R có một hoán vị Nakayama σ của $\{1, 2, \dots, n\}$. Đặc biệt, nếu R không là vành đơn thì $\sigma(i) \neq i$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra R hoặc là vành Artin nửa đơn hoặc là vành nửa hoàn chỉnh cơ sở bởi Định lý 3.1.4. Nếu R là vành Artin nửa đơn thì R là vành tựa Frobenius, suy ra R có hoán vị Nakayama. Giả sử R không là vành đơn. Khi đó, R là vành nửa hoàn chỉnh cơ sở.

Với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, từ tính đơn của $\text{Soc}(e_iR)$ suy ra tồn tại $\sigma(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $\text{Soc}(e_iR) \cong e_{\sigma(i)}R/e_{\sigma(i)}J(R)$ bởi Hệ quả 1.3.10. Ta kiểm tra được ánh xạ σ là một hoán vị của tập $\{1, 2, \dots, n\}$. Thật vậy, giả sử $\sigma(i) = \sigma(j)$, suy ra $\text{Soc}(e_iR) \cong \text{Soc}(e_jR)$. Do tính nội xạ của e_iR và e_jR nên $e_iR \cong e_jR$, suy ra $i = j$. Gọi

$$\alpha : e_{\sigma(i)}R/e_{\sigma(i)}J(R) \rightarrow \text{Soc}(e_iR)$$

là đẳng cấu và đặt

$$s_i = \alpha(e_{\sigma(i)} + e_{\sigma(i)}J(R)).$$

Ta có $s_i \in \text{Soc}(e_iR)$ và $\text{Soc}(e_iR)$ là idêan phải đơn nên $s_iR = \text{Soc}(e_iR)$ là idêan phải cực tiểu của R . Từ $s_i \in \text{Soc}(e_iR)$ dẫn đến $e_is_i = s_i$, suy ra $(1 - e_i)s_i = 0$, tức là $1 - e_i \in l_R(s_i)$ hay $R(1 - e_i) \leq l_R(s_i)$. Vì s_iR là idêan phải cực tiểu của R nên Rs_i là idêan trái cực tiểu của R . Suy ra $l_R(s_i)$ là idêan trái cực đại của R , nên dẫn đến $J(R) \leq l_R(s_i)$. Vì vậy, $J(R) + R(1 - e_i) \leq l_R(s_i)$. Mặt khác, vì

$$R/[J(R) + R(1 - e_i)] \cong Re_i/J(R)e_i$$

và $Re_i/J(R)e_i$ là môđun đơn nên $R/[J(R) + R(1 - e_i)]$ là môđun đơn. Suy ra $J(R) + R(1 - e_i)$ là idêan trái cực đại của R . Do đó,

$$l_R(s_i) = J(R) + R(1 - e_i)$$

Vì vậy, $Rs_i \cong R/l_R(s_i) \cong Re_i/J(R)e_i$. Vì $s_i \in \text{Soc}(e_iR) \subseteq \text{Soc}(R_R) = \text{Soc}({}_R R)$ nên $s_i \in \text{Soc}({}_R R)$, suy ra

$$s_i = s_ie_{\sigma(i)} \in \text{Soc}({}_R R)e_{\sigma(i)} = \text{Soc}(Re_{\sigma(i)}).$$

Theo Bổ đề 3.1.9, $\text{Soc}(Re_{\sigma(i)})$ là idêan trái đơn nên $Rs_i = \text{Soc}(Re_{\sigma(i)})$, dẫn đến $\text{Soc}(Re_{\sigma(i)}) \cong Re_i/J(R)e_i$. Vì vậy, σ là hoán vị Nakayama.

Giả sử tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $\sigma(i) = i$, tức là $\text{Soc}(e_i R) \cong e_i R / e_i J(R)$. Nếu $e_i R(1 - e_i) \neq 0$ thì tồn tại $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \neq i$ sao cho $e_i R e_j \neq 0$. Khi đó, tồn tại đồng cấu khác không $\beta : e_j R \rightarrow e_i R$. Theo Bổ đề 1.3.42 và $e_i R$ là môđun đều, ta suy ra $\text{Im}(\beta)$ là môđun đơn. Mặt khác, vì $\text{Soc}(e_i R) \cong e_i R / e_i J(R)$ và $\{e_i R / e_i J(R)\}$ là tập đại diện đầy đủ các R -môđun phải đơn nên $\text{Im}(\beta) = \text{Soc}(e_i R)$. Hơn nữa, vì $e_j R / \text{Ker}(\beta) \cong \text{Im}(\beta)$ nên $\text{Ker}(\beta)$ là môđun con cực đại trong $e_j R$. Khi đó, $\text{Ker}(\beta) = e_j J(R)$, suy ra $e_j R / e_j J(R) \cong \text{Soc}(e_i R) \cong e_i R / e_i J(R)$. Từ đó dẫn đến $e_i R \cong e_j R$, mâu thuẫn. Do đó, $e_i R(1 - e_i) = 0$. Tương tự, ta chứng minh được $(1 - e_i) R e_i = 0$. Thật vậy, nếu $(1 - e_i) R e_i \neq 0$ thì tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \neq i$ sao cho $e_k R e_i \neq 0$. Lập lại lập luận trên cũng dẫn đến mâu thuẫn. Vậy, $e_i R(1 - e_i) = 0 = (1 - e_i) R e_i$. Do đó, e_i là lũy đẳng tâm của R , mâu thuẫn. Vì vậy, $\sigma(i) \neq i$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. $\square$

Bổ đề 3.1.12. *Nếu R là vành không phân tích được, không là vành đơn và có các phần tử lũy đẳng không tầm thường thì $e_i R e_i$ là vành chia với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Chứng minh. Vì R là vành không phân tích được, không là vành đơn nên R là vành nửa hoàn chỉnh cơ sở và tồn tại các phần tử lũy đẳng địa phương trực giao $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ sao cho $1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n$. Với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tồn tại $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \neq i$ sao cho $e_i R e_j \neq 0$ bởi Bổ đề 3.1.11. Giả sử $e_i R(1 - e_i) = 0$, suy ra $e_i R(\sum_{k \neq i}^n e_k) = 0$, dẫn đến $e_i R e_j = 0$, mâu thuẫn. Vì vậy, $e_i R(1 - e_i) \neq 0$. Ta sẽ chứng minh $e_i J(R) e_i = 0$. Từ Bổ đề 3.1.10, suy ra $e_i R(1 - e_i) \subseteq \text{Soc}(R_R)$. Mà $e_i R(1 - e_i) \subseteq e_i R$ nên

$$e_i R(1 - e_i) \subseteq \text{Soc}(R_R) \cap e_i R = \text{Soc}(e_i R).$$

Do đó, $e_i R(1 - e_i) = \text{Soc}(e_i R)(1 - e_i)$. Tiếp theo, chứng minh $e_i J(R) e_i$ là môđun con của $e_i R$. Vì R là bất biến đẳng cấu phải nên theo Hệ quả 1.3.36 ta có

$$J(R) = \{a \in R : r_R(a) \leq^e R_R\}.$$

Với mọi $a \in J(R) = Z(R_R)$, ta có $r_R(a) \leq^e R_R$ nên suy ra $\text{Soc}(e_i R) \leq r_R(a)$. Từ đó suy ra $a \text{Soc}(e_i R) = 0$, dẫn đến $J(R) \text{Soc}(e_i R) = 0$. Mà $\text{Soc}(e_i R) \subseteq e_i R$ nên $e_i \text{Soc}(e_i R) = \text{Soc}(e_i R)$. Từ đó suy ra

$$(e_i J(R) e_i) \text{Soc}(e_i R) = e_i J(R) \text{Soc}(e_i R) = 0.$$

Do đó, $(e_i J(R) e_i)(e_i R(1 - e_i)) = 0$. Mặt khác, ta có

$$e_i J(R) e_i R = e_i J(R) e_i (R e_i + R(1 - e_i)) = e_i J(R) e_i R e_i \subseteq e_i J(R) e_i.$$

Vì vậy, $e_i J(R) e_i$ là R -môđun con của $e_i R$. Vì $\text{Soc}(e_i R)$ là ideal phải đơn nên

$$e_i J(R) e_i \cap \text{Soc}(e_i R) = 0 \text{ hoặc } \text{Soc}(e_i R) \leq e_i J(R) e_i.$$

Giả sử $\text{Soc}(e_i R) \leq e_i J(R) e_i$, suy ra

$$e_i R(1 - e_i) = \text{Soc}(e_i R)(1 - e_i) \leq e_i J(R) e_i(1 - e_i) = 0.$$

Điều này mâu thuẫn nên $e_i J(R) e_i \cap \text{Soc}(e_i R) = 0$. Vì vậy, $e_i J(R) e_i = 0$ bởi vì $\text{Soc}(e_i R)$ là ideal cốt yếu trong $e_i R$. Mà $e_i R$ là môđun nội xạ không phân tích được nên $\text{End}(e_i R)$ là vành địa phương. Lại có, $e_i R e_i \cong \text{End}(e_i R)$ là vành địa phương nên kết luận rằng $e_i R e_i / e_i J(R) e_i$ là vành chia. Vậy, $e_i R e_i$ là vành chia với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. $\square$

Sau đây là kết quả chính trong phần này. Định lý này xác định điều kiện đủ để a -vành phải I -hữu hạn là vành tựa Frobenius.

Định lý 3.1.13. *Nếu R là vành không phân tích được, không là vành đơn và có các phần tử lũy đẳng không tầm thường thì R là vành tựa Frobenius.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 3.1.9, R là vành nửa hoàn chỉnh cơ sở, tự nội xạ phải và $S = \text{Soc}(R_R)$ là R -môđun Artin. Vì $R = e_1 R \oplus e_2 R \oplus \dots \oplus e_n R$ nên suy ra

$$R = \sum_{i=1}^n e_i R e_i + \sum_{i \neq j}^n e_i R e_j.$$

Hơn nữa, $e_i R e_j \subseteq S$ với mọi $i \neq j$ (Bổ đề 3.1.10). Xét ánh xạ

$$\phi : R/S \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n e_i R e_i$$

xác định bởi $\phi(\sum_{i=1}^n e_i r_i e_i + S) = \sum_{i=1}^n e_i r_i e_i$. Nếu $\sum_{i=1}^n e_i r_i e_i \in S$ thì $e_i r_i e_i \in e_i S e_i$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Vì e_i là phần tử lũy đẳng địa phương nên $e_i J(R)$ là môđun con cực đại duy nhất của $e_i R$, suy ra $e_i S \leq e_i J(R)$ và vì vậy $e_i r_i e_i \in e_i J(R) e_i$. Theo Bổ đề 3.1.12, $e_i R e_i$ là vành chia nên $e_i J(R) e_i = 0$. Suy ra $e_i r_i e_i = 0$ với mọi $i \in \{1, \dots, n\}$. Do đó, ϕ là ánh xạ. Ta kiểm tra được ϕ là đẳng cấu vành. Do đó, R/S là vành Artin nửa đơn, dẫn đến R là vành Artin phải. Vì vậy, R là vành tựa Frobenius. $\square$

Từ kết quả của Định lý 1.3.39 và Định lý 3.1.13 chúng tôi suy ra điều kiện để lớp a -vành phải và lớp q -vành phải trùng nhau trong hệ quả dưới đây.

Hệ quả 3.1.14. *Cho R là vành không phân tích được, không là vành đơn và có các phần tử lũy đẳng không tầm thường. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

(1) R là q -vành phải.

(2) R là a -vành phải.

(3) Nếu e và f là các phần tử lũy đẳng trực giao của R thì $eRf \subseteq \text{Soc}(R_R)$.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Hiển nhiên.

(2) $\Rightarrow$ (3) Theo kết quả của Bổ đề 3.1.10.

(3) $\Rightarrow$ (1) Từ giả thiết dẫn đến R là vành tựa Frobenius, nửa hoàn chỉnh cơ sở. Suy ra R_R là đối sinh nội xạ. Vì vậy, R là q -vành phải theo Định lý 1.3.39. $\square$

3.2. Vành mà mỗi idêan phải bất biến lũy linh

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu một trường hợp tổng quát của lớp a -vành phải, gọi là $\mathbf{n}$ -vành phải. Chúng tôi nghiên cứu đặc trưng, cấu trúc và tính chất của lớp vành này. Hơn nữa, chúng tôi cũng nghiên cứu vành ma trận tam giác hình thức với điều kiện bất biến lũy linh của các môđun. Các kết quả chính trong phần này là Mệnh đề 3.2.4, Định lý 3.2.13, Định lý 3.2.15, Định lý 3.2.23, Định lý 3.2.26, Định lý 3.2.27, Mệnh đề 3.2.30.

3.2.1. Định nghĩa và các tính chất

Định nghĩa 3.2.1. Một vành R được gọi là $\mathbf{n}$ -vành phải nếu mỗi idêan phải của R là bất biến lũy linh.

Từ định nghĩa $\mathbf{n}$ -vành phải, ta có mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải là vành bất biến lũy linh phải. Trong trường hợp vành đã cho là giao hoán, điều kiện để vành bất biến lũy linh trở thành $\mathbf{n}$ -vành được trình bày trong bổ đề sau.

Bổ đề 3.2.2. Vành giao hoán R là $\mathbf{n}$ -vành khi và chỉ khi R là vành bất biến lũy linh.

Chứng minh. Nếu R là $\mathbf{n}$ -vành giao hoán thì R là vành bất biến lũy linh. Ngược lại, giả sử R là vành bất biến lũy linh giao hoán, I là idêan của R và U là phần bù của I trong R . Khi đó, ta có $I \oplus U \leq^e R$, suy ra $E(R) = E(I \oplus U)$. Gọi φ là tự đồng cấu lũy linh của $E(R)$. Vì R là vành bất biến lũy linh nên $\varphi(R) \leq R$. Từ đó dẫn đến $\varphi(1) \in R$. Với mọi $x \in I \oplus U$, ta được $\varphi(x) = \varphi(1)x \in I \oplus U$. Do đó, $\varphi(I \oplus U) \leq I \oplus U$. Vì vậy, $I \oplus U$ là môđun bất biến lũy linh. Vì mỗi hạng tử trực tiếp của môđun bất biến lũy linh là môđun bất biến lũy linh nên I là idêan bất biến lũy linh. Điều này chứng tỏ R là $\mathbf{n}$ -vành. $\square$

Mỗi a -vành phải là $\mathbf{n}$ -vành phải. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng trong trường hợp tổng quát. Ví dụ dưới đây chỉ ra rằng một $\mathbf{n}$ -vành có thể không là a -vành.

Ví dụ 3.2.3. (1) Mỗi miền nguyên R là vành bất biến lũy linh. Hơn nữa, nếu R không là trường thì R không là a -vành [26, Example 2.6]. Áp dụng Bổ đề 3.2.2, R là $\mathbf{n}$ -vành. Do đó, vành số nguyên $\mathbb{Z}$, vành đa thức trên trường $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ là $\mathbf{n}$ -vành nhưng không là a -vành.

(2) Cho $Q = \prod_{i=1}^{\infty} F_i$, trong đó $F_i = \mathbb{K}$ là trường với mọi $i \in \mathbb{N}$ và $|\mathbb{K}| > 2$. Gọi R là vành con của Q được sinh bởi $\bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i$ và 1_Q . Từ kết quả trong [26, Example 2.3], suy ra R là vành giao hoán, bất biến lũy linh mà không bất biến đẳng cấu. Do đó, R là $\mathbf{n}$ -vành và không là a -vành.

Tương tự như đặc trưng của a -vành phải thông qua các idêan phải cốt yếu, chúng tôi cũng xác định được đặc trưng của $\mathbf{n}$ -vành phải dựa trên các idêan phải cốt yếu.

Mệnh đề 3.2.4. *Các phát biểu sau là tương đương đối với vành R :*

- (1) R là $\mathbf{n}$ -vành phải.
- (2) Mỗi idêan phải cốt yếu của R là bất biến lũy linh.
- (3) R là vành bất biến lũy linh phải và mỗi idêan phải cốt yếu của R là T -môđun trái, trong đó T là vành con của R có tập sinh là phần tử đơn vị và các phần tử lũy linh của R , mà các phần tử lũy linh này mở rộng được thành các tự đồng cấu lũy linh của bao nội xạ $E(R_R)$.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) Vì R là $\mathbf{n}$ -vành phải nên mọi idêan phải của R là bất biến lũy linh. Do đó, mỗi idêan phải cốt yếu của R là bất biến lũy linh.

(2) $\Rightarrow$ (1) Gọi I là idêan phải bất kỳ của R . Khi đó, tồn tại idêan phải K của R sao cho $I \oplus K \leq^e R$. Theo (2), $I \oplus K$ là idêan phải bất biến lũy linh. Do đó, I cũng là idêan phải bất biến lũy linh. Vậy, R là $\mathbf{n}$ -vành phải.

(2) $\Rightarrow$ (3) Vì mỗi idêan phải cốt yếu của R là bất biến lũy linh nên R là vành bất biến lũy linh. Gọi I là idêan phải cốt yếu của R , suy ra $E(I) = E(R)$. Giả sử T là vành con của R được sinh bởi phần tử đơn vị và các phần tử lũy linh của R , trong đó mỗi phần tử lũy linh có thể mở rộng được thành một tự đồng cấu lũy linh của bao nội xạ $E(R_R)$. Khi đó, vành T được xem như là vành con của $\text{End}(E(R))$. Do đó, $TI \leq I$. Vậy, I là T -môđun trái.

(3) $\Rightarrow$ (1) Gọi I là idêan phải cốt yếu của R và φ là tự đồng cấu lũy linh của $E(R)$. Khi đó, $E(I) = E(R)$ và $\varphi(1)$ là phần tử lũy linh của R . Theo (3), ta có $\varphi(1)I \leq I$ nên suy ra $\varphi(I) \leq I$. Do đó, I là idêan phải bất biến lũy linh. Vậy, R là $\mathbf{n}$ -vành phải. $\square$

Theo [5], một vành R được gọi là *thỏa mãn điều kiện tương thích Osofsky phải* nếu bao nội xạ $E(R_R)$ của R_R có cấu trúc vành, trong đó phép nhân vành là mở rộng của phép nhân vô hướng của R -môđun $E(R_R)$ trên R . Áp dụng Mệnh đề 3.2.4 cho vành R thỏa mãn điều kiện tương thích Osofsky phải, chúng tôi được kết quả sau.

Hệ quả 3.2.5. *Cho vành R thỏa mãn điều kiện tương thích Osofsky phải. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

- (1) R là $\mathbf{n}$ -vành phải.
- (2) Mỗi ideal phải cốt yếu của R là bất biến lũy linh.
- (3) R là vành bất biến lũy linh phải và mỗi ideal phải cốt yếu của R là T -môđun trái, trong đó T là vành con của R được sinh bởi phần tử đơn vị và các phần tử lũy linh của R .

Chứng minh. Theo kết quả của Mệnh đề 3.2.4, ta chỉ cần chứng minh mỗi phần tử lũy linh của R (được xem như là tự đồng cấu lũy linh của R_R) có thể mở rộng thành một tự đồng cấu lũy linh của $E(R_R)$. Thật vậy, gọi a là phần tử lũy linh của R . Khi đó, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $a^n = 0$. Xét ánh xạ $\varphi : E(R_R) \rightarrow E(R_R)$ xác định bởi $\varphi(x) = a \circ x$, trong đó $\circ$ là phép nhân của vành thỏa mãn điều kiện tương thích Osofsky phải. Với mọi $x, y \in E(R_R)$ và $r \in R$, ta có:

$$\varphi(x + y) = a \circ (x + y) = a \circ x + a \circ y = \varphi(x) + \varphi(y),$$

$$\varphi(xr) = a \circ (xr) = a \circ (x \circ r) = (a \circ x) \circ r = \varphi(x) \circ r = \varphi(x)r.$$

Hơn nữa, ta có:

$$\begin{aligned}\varphi^2(x) &= \varphi(\varphi(x)) = \varphi(a \circ x) = a \circ a \circ x = a^2 \circ x \\ \varphi^3(x) &= \varphi(\varphi^2(x)) = \varphi(a^2 \circ x) = a \circ a^2 \circ x = a^3 \circ x \\ &\dots\end{aligned}$$

$$\varphi^n(x) = \varphi(\varphi^{n-1}(x)) = \varphi(a^{n-1} \circ x) = a \circ a^{n-1} \circ x = a^n \circ x = 0.$$

Suy ra φ là tự đồng cấu lũy linh của $E(R_R)$. Với $x = 1$ ta được $\varphi(1) = a$. Mặt khác, với mọi $r \in R$, ta có:

$$\varphi(r) = \varphi(1.r) = \varphi(1)r = ar.$$

Do đó, phần tử lũy linh a mở rộng được thành một tự đồng cấu lũy linh của $E(R_R)$. $\square$

Các bổ đề sau đây trình bày một số tính chất của ideal phải trong $\mathbf{n}$ -vành phải.

Bổ đề 3.2.6. Cho I, J là các ideal phải của $\mathbf{n}$ -vành phải R sao cho $I \cap J = 0$ và $I \cong J$. Khi đó,

- (1) I và J là các ideal phải nửa đơn, nội xạ.
- (2) Các ideal phải I và J không suy biến.

Chứng minh. (1) Gọi K là phần bù của $I \oplus J$ trong R_R . Khi đó, $(I \oplus J) \oplus K \leq^e R_R$, dẫn đến $E((I \oplus J) \oplus K) = E(R_R)$. Mà $E((I \oplus J) \oplus K) = E(I) \oplus E(J) \oplus E(K)$ nên $E(R_R) = E(I) \oplus E(J) \oplus E(K)$. Do đó, tồn tại môđun con L của $E(R_R)$ sao cho $E(R_R) = E(I) \oplus E(J) \oplus L$. Mà $I \cong J$ nên $E(I) \cong E(J)$. Ngoài ra, vì R là vành bất biến lũy linh phải nên

$$R_R = (R \cap E(I)) \oplus (R \cap E(J)) \oplus (R \cap L).$$

Vì R là $\mathbf{n}$ -vành phải nên suy ra $J \oplus [R \cap E(I)]$ và $I \oplus [(R \cap E(J)) \oplus (R \cap L)]$ là bất biến lũy linh. Theo Định lý 1.2.3, J là $[R \cap E(I)]$ -nội xạ và I là $[(R \cap E(J)) \oplus (R \cap L)]$ -nội xạ. Vì $I \cong J$ nên I là R -nội xạ. Vậy, I là ideal phải nội xạ.

Gọi $\varphi : I \rightarrow J$ là đẳng cấu, U là môđun con khác không bất kỳ của I và $V = \varphi(U)$. Khi đó, $U \cong \varphi(U) = V$ và $U \cap V = 0$. Lập luận tương tự như trên, U là môđun nội xạ. Suy ra U là hạng tử trực tiếp của I . Vậy, I là ideal phải nửa đơn. Chứng minh tương tự, J cũng là ideal phải nửa đơn và nội xạ.

(2) Giả sử x là phần tử tùy ý của $Z(I)$. Theo (1), xR là hạng tử trực tiếp của I . Do đó, xR là môđun nội xạ, suy ra tồn tại phần tử lũy đẳng $e \in R$ sao cho $xR = eR \leq Z(I)$. Vì $e \in Z(I)$ nên $r_R(e) \leq^e R$. Mà $r_R(e) = (1-e)R$ và $eR \cap (1-e)R = 0$ nên suy ra $eR = 0$, dẫn đến $e = 0$. Vậy, $Z(I) = 0$ hay I là ideal phải không suy biến. Tương tự, J cũng là ideal phải không suy biến. $\square$

Bổ đề 3.2.7. Cho $\mathbf{n}$ -vành phải R và có các ideal phải A và B sao cho $A \cap B = 0$. Khi đó,

- (1) $\varphi(A)$ là môđun nửa đơn khác không với bất kỳ $\varphi : A \rightarrow B$ là đồng cấu khác không.
- (2) $\text{Soc}(eR) \neq 0$, trong đó e là phần tử lũy đẳng không tầm thường của R thỏa mãn $eR(1-e) \neq 0$.

Chứng minh. (1) Giả sử U là môđun con cốt yếu bất kỳ của B . Khi đó, $E(U) = E(B)$ và $U \oplus A$ là môđun bất biến lũy linh. Theo Định lý 1.2.3, U là A -nội xạ. Mặt khác, vì $E(B)$ là môđun nội xạ nên tồn tại đồng cấu $\bar{\alpha} : E(A) \rightarrow E(B)$ sao cho $\bar{\alpha}|_A = \varphi$. Do đó, $\bar{\alpha}(A) \leq U$ và $\varphi(A) = \bar{\alpha}(A) \leq U$. Suy ra $\varphi(A) \leq \text{Soc}(B)$. Điều này chứng tỏ $\varphi(A)$ là môđun nửa đơn khác không.

(2) Vì $eR(1 - e) \neq 0$ nên tồn tại $r_0 \in R$ sao cho $er_0(1 - e) \neq 0$. Xét đồng cấu $\beta : (1 - e)R \rightarrow eR$ xác định bởi $\beta((1 - e)x) = er_0(1 - e)x$. Ta có $\text{Im}(\beta) \neq 0$, suy ra $\text{Im}(\beta) \leq \text{Soc}(eR)$ bởi vì (1). Vì vậy, $\text{Soc}(eR) \neq 0$. $\square$

Cho M là R -môđun và S là môđun con đơn của M . Xét tập hợp:

$$\{S_i \mid S_i \text{ là môđun con của } M, S_i \cong S\}_{i \in I}.$$

Đặt $[S] = \sum_{i \in I} S_i$. Khi đó, $[S]$ được gọi là *thành phần thuần nhất* của M (loại S). Nếu I là tập hữu hạn thì ta nói tập chỉ số của $[S]$ hữu hạn.

Sau đây, chúng tôi trình bày thành phần thuần nhất không đơn của $\mathbf{n}$ -vành phải. Từ đó, chúng tôi kết luận tính chất của thành phần thuần nhất không đơn trong a -vành phải.

Định lý 3.2.8. *Mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải R có hữu hạn thành phần thuần nhất không đơn và mỗi thành phần này có tập chỉ số hữu hạn. Hơn nữa, mỗi thành phần thuần nhất không đơn của R là nội xạ.*

Chứng minh. Gọi $\{[H_i] : i \in I\}$ là họ các thành phần thuần nhất không đơn của R_R . Khi đó, tồn tại S_i và T_i là các idêan phải cực tiểu của R sao cho $S_i \cap T_i = 0$ và $[S_i] = [H_i] = [T_i]$. Do đó, $\bigoplus_{j \in I} S_j \cong \bigoplus_{j \in I} T_j$ và $(\bigoplus_{j \in I} S_j) \cap (\bigoplus_{j \in I} T_j) = 0$. Theo Bổ đề 3.2.6, $(\bigoplus_{j \in I} S_j) \oplus (\bigoplus_{j \in I} T_j) \leq^\oplus R_R$. Suy ra $(\bigoplus_{j \in I} S_j) \oplus (\bigoplus_{j \in I} T_j)$ là hữu hạn sinh. Vậy, I là tập hữu hạn.

Nếu $[S]$ là thành phần thuần nhất không đơn của R thì $[S] = A \oplus B$ hoặc $[S] = A \oplus B \oplus T$, trong đó $A \cong B$ và T là idêan phải cực tiểu của R , T đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của A . Theo Bổ đề 3.2.6, $A \oplus B$ và T là các môđun nội xạ. Từ đó suy ra $[S]$ là môđun nội xạ. Do đó, $[S]$ là hạng tử trực tiếp của R , dẫn đến $[S]$ là môđun hữu hạn sinh. Vậy, $[S]$ có tập chỉ số hữu hạn và nội xạ. $\square$

Hệ quả 3.2.9. *Mỗi thành phần thuần nhất không đơn của a -vành phải R là nội xạ.*

Áp dụng Định lý 3.2.8, chúng tôi kết luận tính hữu hạn của họ gồm các idêan phải độc lập trong $\mathbf{n}$ -vành phải.

Mệnh đề 3.2.10. *Cho $A = \{A_i : i \in I\}$ là họ gồm các idêan phải độc lập của $\mathbf{n}$ -vành phải R . Với mỗi $i \in I$, nếu tồn tại $j \in I$, $j \neq i$ sao cho $A_i \cong A_j$ thì tập I hữu hạn và mỗi A_i là idêan phải nửa đơn.*

Chứng minh. Với mỗi $i \in I$, nếu tồn tại $j \in I$, $j \neq i$ sao cho $A_i \cong A_j$ thì tất cả các thành phần thuần nhất của A là không đơn. Mà R là $\mathbf{n}$ -vành phải nên R có hữu

hạn thành phần thuần nhất không đơn và mỗi thành phần thuần nhất không đơn có tập chỉ số hữu hạn bởi Định lý 3.2.8. Vậy, I là tập hữu hạn. Mặt khác, từ giả thiết, ta suy ra $A_i \cap A_j = 0$ với mọi $i \neq j$. Theo Bổ đề 3.2.6, A_i là idêan phải nửa đơn. $\square$

3.2.2. Sự phân tích của $\mathfrak{n}$ -vành phải và các vành liên quan

Trước khi phân tích cấu trúc của $\mathfrak{n}$ -vành phải, chúng tôi trình bày một số bổ đề cần thiết để chứng minh kết quả chính.

Bổ đề 3.2.11. *Cho S, T là hai vành và $R = S \oplus T$. Khi đó, R là $\mathfrak{n}$ -vành phải khi và chỉ khi S, T là các $\mathfrak{n}$ -vành phải.*

Chứng minh. Gọi J và K lần lượt là idêan phải của S và T . Khi đó, ta có $J \oplus K$ là idêan phải của R . Vì R là $\mathfrak{n}$ -vành phải nên $J \oplus K$ là idêan phải bất biến lũy linh. Do đó, J và K là các idêan phải bất biến lũy linh. Vậy, S và T là các $\mathfrak{n}$ -vành phải. Ngược lại, gọi I là idêan phải cốt yếu của R và φ là tự đồng cấu lũy linh của $E(R)$. Khi đó, $E(I) = E(R) = E(S) \oplus E(T)$. Lại có, $I = J \oplus K$ với J và K lần lượt là idêan phải cốt yếu của S và T . Hơn nữa, ta có $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$, trong đó $\varphi_1 \in \text{End}(E(S))$ và $\varphi_2 \in \text{End}(E(T))$ là các tự đồng cấu lũy linh. Mà S và T là các $\mathfrak{n}$ -vành phải nên $\varphi(I) = \varphi_1(J) \oplus \varphi_2(K) \leq J \oplus K = I$. Vậy, R là $\mathfrak{n}$ -vành phải. $\square$

Bổ đề 3.2.12. *Cho M là R -môđun bất biến lũy linh và N là môđun con đóng của M . Khi đó,*

- (1) *Nếu L là môđun con của M sao cho $L \cap N = 0$ thì N là L -nội xạ.*
- (2) *Nếu H là môđun con của M sao cho $H \cap N = 0$ và $H \cong N$ thì H là môđun con đóng của M .*

Chứng minh. (1) Gọi C là phần bù của N trong M và chứa L . Khi đó, $C \oplus N \leq^e M$ kéo theo $E(M) = E(C) \oplus E(N)$. Gọi $H \leq C$ và $f : H \rightarrow N$ là đồng cấu. Theo chứng minh Định lý 1.2.3, tồn tại đồng cấu $g : E(C) \rightarrow E(N)$ và một tự đồng cấu lũy linh ϕ của $E(M)$ sao cho $\phi(M) \leq M$, $\phi|_C = g|_C$ và $\phi|_H = f$. Vì $\phi(C) \leq M$, $g(C) \leq E(N)$ và $M \cap E(N) = N$ nên $g(C) = \phi(C) \leq M \cap E(N) = N$. Như vậy, N là C -nội xạ, suy ra N là L -nội xạ.

(2) Xét đẳng cấu $h : N \rightarrow H$ và K là bao đóng của H trong M . Vì $N \cap K = 0$ nên N là K -nội xạ bởi vì (1). Do đó, tồn tại đồng cấu $k : K \rightarrow N$ sao cho k là mở rộng của $h^{-1} : H \rightarrow N$. Gọi $\iota : H \rightarrow K$ là phép nhúng, ta được biểu đồ sau

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\iota} & K \\
& & \downarrow h^{-1} & \swarrow k & \\
& & N & &
\end{array}$$

là giao hoán. Khi đó, với mọi $n \in N$, ta có $n = (h^{-1} \circ h)(n) = (k \circ (\iota \circ h))(n)$. Từ đó suy ra $\iota \circ h : N \rightarrow K$ là đơn cấu chẻ ra. Vì vậy, $\text{Im}(\iota \circ h) = h(N) = H$ là hạng tử trực tiếp của K . Vậy, H là môđun con đóng của M . $\square$

Kết quả sau đây trình bày sự phân tích của $\mathbf{n}$ -vành phải thành tổng trực tiếp của hai vành có cấu trúc khác nhau. Kết quả này có ý nghĩa trong việc nghiên cứu $\mathbf{n}$ -vành phải, đặc biệt là trong chứng minh các tính chất phức tạp.

Định lý 3.2.13. *Mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải là tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn chính phương đầy đủ và một vành không chính phương phải.*

Chứng minh. Gọi $\Lambda = \{(P, Q, \lambda) \mid P, Q \leq R_R, P \cap Q = 0, P \stackrel{\lambda}{\cong} Q\}$. Khi đó, $\Lambda \neq \emptyset$. Xét quan hệ thứ tự trên Λ như sau:

$$(P_1, Q_1, \lambda_1) \leq (P_2, Q_2, \lambda_2) \Leftrightarrow P_1 \leq P_2, Q_1 \leq Q_2, \lambda_2|_{P_1} = \lambda_1.$$

Theo Bổ đề Zorn, tồn tại phần tử cực đại (P, Q, λ) . Mặt khác, tồn tại phần bù L của $P \oplus Q$ trong R_R sao cho $E(R_R) = E(P) \oplus E(Q) \oplus E(L)$ với $E(P) \cong E(Q)$ và $R = (E(P) \cap R) \oplus (E(Q) \cap R) \oplus (E(L) \cap R)$ bởi Định lý 1.2.3. Bởi vì L là môđun con đóng trong R_R và $L \leq^e E(L) \cap R$ nên $L = E(L) \cap R$. Tiếp theo, ta chứng minh $P = E(P) \cap R$ và $Q = E(Q) \cap R$. Chúng ta kiểm tra được $P \leq^e E(P) \cap R$ và $Q \leq^e E(Q) \cap R$. Theo Định lý 1.2.3, $E(Q) \cap R$ là $(E(P) \cap R)$ -nội xạ. Do đó, tồn tại đồng cấu $\bar{\lambda} : E(P) \cap R \rightarrow E(Q) \cap R$ sao cho $\bar{\lambda}|_P = \lambda$. Vì λ là đơn cấu và $P \leq^e E(P) \cap R$ nên $\bar{\lambda}$ là đơn cấu. Mặt khác, Q là môđun con của $\bar{\lambda}(E(P) \cap R)$ và

$$\begin{aligned}
\theta : E(P) \cap R &\rightarrow \bar{\lambda}(E(P) \cap R) \\
p &\mapsto \bar{\lambda}(p)
\end{aligned}$$

là đẳng cấu. Do đó dẫn đến, $(P, Q, \lambda) \leq ((E(P) \cap R), \bar{\lambda}(E(P) \cap R), \theta)$. Từ tính cực đại của (P, Q, λ) suy ra $P = E(P) \cap R$ và $Q = \bar{\lambda}(E(P) \cap R)$. Suy ra P là môđun con đóng của R và $Q = \bar{\lambda}(P)$ cũng là môđun con đóng của R bởi Bổ đề 3.2.12. Như vậy, $R = P \oplus Q \oplus L$.

Vì $P \cong Q$ và P, Q là các môđun nội xạ lẫn nhau nên $P \oplus Q$ là môđun tựa nội xạ. Hơn nữa, giả sử L là môđun chính phương, nghĩa là tồn tại các môđun con U, V của L khác không sao cho $U \cap V = 0$ và $\alpha : U \rightarrow V$ là đẳng cấu. Khi đó,

$$(P, Q, \lambda) \leq (P \oplus U, Q \oplus V, \lambda \oplus \alpha).$$

Điều này mâu thuẫn với tính cực đại của (P, Q, λ) . Vậy, L là môđun không chính phương.

Với $U \leq L$, gọi $u : U \rightarrow P \oplus Q$ là đơn cấu cực đại. Khi đó, tồn tại môđun con đóng $\bar{U}$ của L sao cho $U \leq^e \bar{U}$ và đơn cấu $\bar{u} : \bar{U} \rightarrow P \oplus Q$ sao cho $\bar{u}|_U = u$. Từ đó suy ra $U = \bar{U}$ là môđun con đóng của R . Khi đó, theo Bổ đề 3.2.12, $u(U)$ cũng là môđun con đóng của $P \oplus Q$. Vì $P \oplus Q$ là môđun tựa nội xạ nên $u(U) \leq^\oplus P \oplus Q$. Vì vậy, $U \cong u(U)$ là môđun tựa nội xạ. Từ đó suy ra $U \leq^\oplus L$. Giả sử $L = U \oplus V$, chúng ta sẽ chứng minh V trực giao với $P \oplus Q \oplus U$. Thật vậy, nếu tồn tại các môđun con khác không H và K sao cho $H \leq V$ và $K \leq P \oplus Q \oplus U$ sao cho $H \cong K$. Chúng ta có $L = U \oplus V$ là môđun không chính phương và vì vậy $K \cap U = 0$. Gọi $\pi : P \oplus Q \oplus U \rightarrow P \oplus Q$ là phép chiếu chính tắc. Khi đó, $H \cong K \cong K' = \pi(K) \leq P \oplus Q$. Gọi $\varphi : H \rightarrow K'$ là đẳng cấu. Giả sử $K' \cap u(U) \neq 0$, suy ra $K' \neq 0$. Khi đó, U và V lần lượt chứa hai môđun con khác không đẳng cấu với nhau, mâu thuẫn với tính không chính phương của môđun L . Do đó, $K' \cap u(U) = 0$ nên $\varphi(H) \cap u(U) = 0$.

Xét ánh xạ $\phi : H \oplus U \rightarrow P \oplus Q$ xác định bởi $\phi(x + y) = \varphi(x) + u(y)$, trong đó $x \in H$ và $y \in U$. Ta kiểm tra được ϕ là đơn cấu và $\phi|_U = u$. Điều này mâu thuẫn với tính cực đại của $u : U \rightarrow P \oplus Q$. Vậy, V trực giao với $P \oplus Q \oplus U$.

Như vậy, tồn tại sự phân tích $R_R = P \oplus Q \oplus U \oplus V$ trong đó $P \cong Q$, U nhúng trong $P \oplus Q$ và V là môđun không chính phương trực giao với $P \oplus Q \oplus U$. Đặt $X := P \oplus Q \oplus U$ và $Y := V$. Chúng ta sẽ chứng minh X là môđun chính phương đầy đủ. Gọi T là môđun con tùy ý khác không của X . Nếu $T \cap U \neq 0$ thì tồn tại các môđun con khác không $T_1 \leq T$ và $T'_1 \leq U$ sao cho $T_1 \cong T'_1$. Hơn nữa, U nhúng trong $P \oplus Q$ và $P \cong Q$ nên tồn tại các môđun con khác không $T_2 \leq Q$ và $T'_2 \leq U$ sao cho $T_2 \cong T'_2$. Nếu $T \cap U = 0$ thì T nhúng trong $P \oplus Q$. Mà $P \cong Q$ nên hoặc tồn tại các môđun con khác không $H_1 \leq T$ và $L_1 \leq P$ sao cho $H_1 \cong L_1$ hoặc các môđun con khác không $H_2 \leq T$ và $L_2 \leq Q$ sao cho $H_2 \cong L_2$. Trong cả hai trường hợp trên đều tồn tại các môđun con khác không $U_1 \leq T$ và $V_1 \leq P$ sao cho $U_1 \cong V_1$ hoặc các môđun con khác không $U_2 \leq T$ và $V_2 \leq Q$ sao cho $U_2 \cong V_2$. Từ đó suy ra U_1^2 hoặc U_2^2 có thể nhúng trong X . Điều đó có nghĩa là T chứa nghiệm chính phương trong X nên X là môđun chính phương đầy đủ.

Từ Bổ đề 3.2.6, P và Q là các môđun nửa đơn, nội xạ nên X là môđun nửa đơn và nội xạ. Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh X và Y là các idêan của R . Gọi $f : X \rightarrow Y$ là đồng cấu khác không. Vì X là nửa đơn và $\text{Ker}(f) \leq X$ nên $\text{Ker}(f) \leq^\oplus X$. Do đó, tồn tại $L \leq X$ sao cho $X = \text{Ker}(f) \oplus L$. Ta có $\text{Ker}(f) \cap L = 0$ nên $f|_L : L \rightarrow Y$ là đơn cấu. Suy ra $L \cong \text{Im}(f|_L) = f(L) \subseteq Y$, điều này mâu thuẫn vì X trực giao với Y . Vì vậy, $\text{Hom}_R(X, Y) = 0$.

Giả sử $\varphi : Y \rightarrow X$ là đồng cấu khác không. Khi đó, $\text{Im}(\varphi) \leq^\oplus X \leq^\oplus R_R$ nên $\text{Im}(\varphi)$ là môđun xạ ảnh. Do đó, $Y/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi)$ là xạ ảnh. Từ đó suy ra toàn cấu $p : Y \rightarrow Y/\text{Ker}(\varphi)$ chẻ ra hay $\text{Ker}(p) \leq^\oplus Y$. Vì vậy, $\text{Ker}(\varphi) \leq^\oplus Y$ nên tồn tại

môđun con khác không $K \leq Y$ sao cho $\text{Ker}(\varphi) \cap K = 0$. Dẫn đến, $K \cong \varphi(K)$, mâu thuẫn với tính trực giao của X và Y . Do đó, $\text{Hom}_R(Y, X) = 0$.

Vậy, $R = X \oplus Y$, trong đó X là vành Artin nửa đơn chính phương đầy đủ và Y là vành không chính phương phải. $\square$

Từ Định lý 3.2.13, chúng tôi suy ra kết quả:

Hệ quả 3.2.14. *Mỗi vành không phân tích được R chứa môđun chính phương là n -vành phải khi và chỉ khi R là vành Artin đơn.*

Từ tính chất giản ước trong của vành Artin nửa đơn và vành không chính phương, chúng tôi suy ra tính chất giản ước trong của n -vành phải.

Định lý 3.2.15. *Mỗi n -vành phải có tính chất giản ước trong.*

Chứng minh. Theo Định lý 3.2.13 ta có $R = S \oplus T$ trong đó S là vành Artin nửa đơn và T là môđun không chính phương. Nếu T không là vành hữu hạn trực tiếp thì tồn tại ideal phải thực sự N của T sao cho $T \cong N$ và $T = N \oplus T'$, $0 \neq T' \leq T$. Khi đó

$$T = N \oplus T' \cong T \oplus T' = N \oplus T' \oplus T'$$

hay $T \cong N \oplus T'^2$. Điều này mâu thuẫn với tính không chính phương của T nên T là vành hữu hạn trực tiếp.

Chúng ta chứng minh được S là vành có tính chất giản ước trong. Thật vậy, giả sử $S_S = M \oplus N \cong M' \oplus N'$ và $M \cong M'$. Ta cần chứng minh $N \cong N'$. Do S_S là môđun nửa đơn nên ta có các phân tích nửa đơn sau:

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_m$$

$$N = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_n$$

$$M' = M'_1 \oplus M'_2 \oplus \cdots \oplus M'_p$$

$$N' = N'_1 \oplus N'_2 \oplus \cdots \oplus N'_q$$

Như vậy

$$\left(\bigoplus_{i=1}^m M_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^n N_j\right) \cong \left(\bigoplus_{k=1}^p M'_k\right) \oplus \left(\bigoplus_{l=1}^q N'_l\right)$$

Mà $\bigoplus_{i=1}^m M_i \cong \bigoplus_{k=1}^p M'_k$ nên theo định lý Krull-Schmidt ta có $n = q$ và tồn tại một hoán vị $\sigma \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $N_i \cong N'_{\sigma(i)}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Do đó, $\bigoplus_{j=1}^n N_j \cong \bigoplus_{l=1}^q N'_l$ hay $N \cong N'$. Vậy, S_S có tính chất giản ước trong.

Tiếp theo, chứng minh T là vành có tính chất giản ước trong. Giả sử $T = I \oplus J = H \oplus K$ với $I \cong H$, ta sẽ chứng minh $J \cong K$. Gọi $\phi : I \rightarrow H$ là T -đẳng

cầu và $L = I \cap K$, suy ra $L \cong \phi(L)$. Lại có, $L \leq K$, $\phi(L) \leq H$ và $H \cap K = 0$ nên $L \cap \phi(L) = 0$. Bởi vì T_T là môđun không chính phương nên $L = 0$. Từ đó suy ra $I \cap K = 0$. Mà T là $\mathbf{n}$ -vành phải nên T_T là môđun bất biến lũy linh. Suy ra T thỏa mãn điều kiện C3, dẫn đến $I \oplus K \leq^\oplus T$. Do đó, $T = H \oplus K \cong I \oplus K \leq^\oplus T$. Vì T là môđun hữu hạn trực tiếp nên suy ra $T = I \oplus K$. Vì vậy, $J \cong K$, từ đó kết luận T có tính chất giản ước trong. Vì tính chất giản ước trong đóng đối với tích trực tiếp nên vành R cũng có tính chất giản ước trong. $\square$

Như vậy, mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải có tính chất giản ước trong. Hơn thế nữa, nếu $\mathbf{n}$ -vành phải R có tính chất trao đổi hữu hạn thì R sẽ có miền ổn định một, có tính chất thế và tính chất giản ước theo Mệnh đề 1.1.2. Các kết quả sau được xem như là hệ quả của Định lý 3.2.15.

Hệ quả 3.2.16. *Mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải R có tính chất trao đổi hữu hạn thì có miền ổn định một. Trong trường hợp này, vành R cũng có tính chất thế và tính chất giản ước.*

Chú ý 3.2.17. Từ Hệ quả 3.2.16, nếu mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải có tính chất trao đổi hữu hạn thì có tính chất giản ước. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn như vành số nguyên $\mathbb{Z}$ là $\mathbf{n}$ -vành có tính chất giản ước nhưng không có tính chất trao đổi hữu hạn.

Hệ quả 3.2.18. *Mỗi a -vành phải R có miền ổn định một. Đặc biệt, R là vành ổn định hữu hạn.*

Vì mỗi vành chính quy luôn có tính chất trao đổi [49, Theorem 3] nên mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải chính quy có miền ổn định một (Hệ quả 3.2.16). Theo [31, Corollary 5.5], mỗi vành chính quy có miền ổn định một là vành chính quy khả nghịch. Từ đó, chúng tôi suy ra tính chính quy khả nghịch của $\mathbf{n}$ -vành phải chính quy trong hệ quả dưới đây.

Hệ quả 3.2.19. *Mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải chính quy là vành chính quy khả nghịch.*

Mỗi a -vành phải nửa nguyên tố có để phải bằng không là một vành chính quy mạnh [27, Proposition 4.6]. Tương tự, chúng tôi cũng chứng minh kết quả tương ứng đối với trường hợp $\mathbf{n}$ -vành phải chính quy không có môđun con đơn.

Định lý 3.2.20. *Nếu R là $\mathbf{n}$ -vành phải chính quy có $\text{Soc}(R_R) = 0$ thì R là vành chính quy mạnh.*

Chứng minh. Gọi e là phần tử lũy đẳng của R . Khi đó, $eR(1 - e) = 0$. Thật vậy, nếu $eR(1 - e) \neq 0$ thì $\text{Soc}(eR) \neq 0$ bởi vì Bổ đề 3.2.7, điều này mâu thuẫn. Ngoài ra, nếu $(1 - e)Re \neq 0$ thì tồn tại $r_0 \in R$ sao cho $(1 - e)r_0e \neq 0$. Xét đồng cấu

$\beta : eR \rightarrow (1 - e)R$ xác định bởi $\beta(ex) = (1 - e)r_0ex$. Khi đó, $\text{Im}(\beta) \neq 0$. Áp dụng Bổ đề 3.2.7, ta được $\text{Im}(\beta) \leq \text{Soc}((1 - e)R)$, dẫn đến $\text{Soc}((1 - e)R) \neq 0$, điều này mâu thuẫn. Vì vậy, $(1 - e)Re = 0$. Do đó, e là phần tử lũy đẳng tâm của R . Vậy, R là vành chính quy mạnh. $\square$

Một hệ quả của Định lý 3.2.20 trong trường hợp R là a -vành phải được phát biểu như sau:

Hệ quả 3.2.21. *Nếu R là a -vành phải chính quy thì $\text{Soc}(R_R) \neq 0$ hoặc R là vành chính quy mạnh.*

Nghiên cứu đặc trưng các $\mathbf{n}$ -vành phải nguyên tố có để phải khác không, chúng tôi có kết quả:

Mệnh đề 3.2.22. *Cho R là vành có để phải khác không. Khi đó, R là $\mathbf{n}$ -vành phải nguyên tố khi và chỉ khi vành R là Artin đơn.*

Chứng minh. Từ giả thiết, R là vành nguyên tố nên suy ra R là vành không phân tích được. Nếu R chứa môđun chính phương thì R là vành Artin đơn bởi Hệ quả 3.2.14. Ngược lại, giả sử mọi R -môđun là không chính phương, dẫn đến tồn tại idêan phải cực tiểu S của R sao cho mỗi idêan phải cực tiểu (trung thành) của R đẳng cấu với S theo Định lý 1.3.31. Từ tính không chính phương của các môđun suy ra $\text{Soc}(R_R)$ là idêan đơn. Trong trường hợp này, vì R là vành nguyên tố nên R cũng là vành chia. Vì vậy, R là vành Artin đơn. Ngược lại, nếu R là vành Artin đơn thì R là $\mathbf{n}$ -vành phải nguyên tố. $\square$

Nếu R là vành Artin nửa đơn thì vành các ma trận vuông cấp n trên R cũng là vành Artin nửa đơn và ngược lại. Các tác giả Koşan, Quynh và Srivastava đã chứng minh rằng vành R là Artin nửa đơn khi và chỉ khi vành các ma trận vuông cấp n trên R là a -vành phải [27, Theorem 3.6]. Tương tự như vậy, chúng tôi có kết quả liên quan đến tính bất biến lũy linh của vành ma trận $\mathbb{M}_n(R)$ như sau:

Định lý 3.2.23. *Cho số nguyên $n > 1$, vành R là Artin nửa đơn khi và chỉ khi vành ma trận $\mathbb{M}_n(R)$ là $\mathbf{n}$ -vành phải.*

Chứng minh. Vì R là vành Artin nửa đơn nên $\mathbb{M}_n(R)$ cũng là vành Artin nửa đơn. Vậy, $\mathbb{M}_n(R)$ là $\mathbf{n}$ -vành phải. Ngược lại, đặt $S = \mathbb{M}_n(R)$ và gọi $\{e_{ii} | 1 \leq i \leq n\}$ là tập hợp các ma trận của S , trong đó e_{ii} là ma trận có vị trí (i, i) là 1, các vị trí còn lại là 0. Khi đó, $S = e_{11}S \oplus e_{22}S \oplus \cdots \oplus e_{nn}S$. Với mọi $1 \leq i, j \leq n$, xét ánh xạ $\phi_{ij} : e_{ii}S \rightarrow e_{jj}S$ xác định bởi $\phi_{ij}(e_{ii}A) = (b_{kl})_{n \times n}$, trong đó

$$b_{kl} = \begin{cases} a_{il} & \text{ khi } k = j \\ 0 & \text{ khi } k \neq j \end{cases}$$

và $A = (a_{pq})_{n \times n} \in S$. Khi đó, ϕ_{ij} là S -đẳng cấu. Theo giả thiết, $\mathbb{M}_n(R)$ là $\mathbf{n}$ -vành phải nên suy ra $e_{ii}S$, $i = 1, 2, \dots, n$ là S -môđun phải nửa đơn bởi Bổ đề 3.2.6. Do đó, S là vành Artin nửa đơn. Vậy, R là vành Artin nửa đơn. $\square$

Chú ý 3.2.24. Vành số nguyên $\mathbb{Z}$ là $\mathbf{n}$ -vành giao hoán. Tuy nhiên, nếu $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ là $\mathbf{n}$ -vành phải thì $\mathbb{Z}$ là vành Artin nửa đơn, điều này mâu thuẫn. Do đó, $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ không là $\mathbf{n}$ -vành phải.

Trong trường hợp R là vành các phép biến đổi tuyến tính trên vành chia, áp dụng Định lý 3.2.23, chúng tôi đưa ra điều kiện tương đương để R là $\mathbf{n}$ -vành phải.

Hệ quả 3.2.25. Cho V là không gian vectơ trái trên vành chia D . Khi đó, vành các phép biến đổi tuyến tính $R = \text{End}({}_D V)$ là $\mathbf{n}$ -vành phải nếu và chỉ nếu V là không gian vectơ hữu hạn chiều.

Chứng minh. Giả sử ${}_D V$ là không gian vectơ vô hạn chiều. Theo [30, Example 3.74A,B], R không là vành tự nội xạ phải. Do đó, R không là vành Artin nửa đơn. Mặt khác, vì V là không gian vectơ vô hạn chiều nên $V \cong D^{(\mathbb{N})}$. Do đó, $V \cong V^{(n)}$ với $n \in \mathbb{N}$, suy ra $\text{End}(V) \cong \text{End}(V^{(n)}) \cong \mathbb{M}_n(\text{End}(V))$. Mà $\text{End}(V)$ là $\mathbf{n}$ -vành phải nên $\mathbb{M}_n(\text{End}(V))$ là $\mathbf{n}$ -vành phải. Từ Định lý 3.2.23, ta suy ra $R = \text{End}(V)$ là vành Artin nửa đơn, mâu thuẫn. Vì vậy, V là không gian vectơ hữu hạn chiều. Ngược lại, nếu V là không gian vectơ hữu hạn chiều thì $V \cong D^n$, $n \in \mathbb{N}$. Do đó, $\text{End}(V) \cong \text{End}(D^n) \cong \mathbb{M}_n(D)$. Mà D là vành chia nên D cũng là vành Artin nửa đơn. Khi đó, theo Định lý 3.2.23, ta kết luận $\mathbb{M}_n(D)$ là $\mathbf{n}$ -vành phải. Vậy, $\text{End}(V)$ là $\mathbf{n}$ -vành phải. $\square$

Trong định lý cuối cùng của phần này, chúng tôi trình bày kết quả về ổn định hữu hạn của $\mathbf{n}$ -vành phải.

Định lý 3.2.26. Mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải là vành ổn định hữu hạn.

Chứng minh. Gọi R là $\mathbf{n}$ -vành phải. Theo Định lý 3.2.13, ta có $R = S \oplus T$ trong đó S_S là Artin nửa đơn và T_T là không chính phương. Khi đó,

$$\mathbb{M}_n(R) = \mathbb{M}_n(S \oplus T) \cong \mathbb{M}_n(S) \oplus \mathbb{M}_n(T).$$

Mà S là vành Artin nửa đơn nên $\mathbb{M}_n(S)$ là vành Artin nửa đơn. Do đó, $\mathbb{M}_n(S)$ là vành hữu hạn trực tiếp. Ta sẽ chứng minh $\mathbb{M}_n(T)$ là vành hữu hạn trực tiếp. Đặt $\bar{T} = \text{End}_T(E(T_T))$. Vì $E(T_T)$ là môđun không chính phương nên $\bar{T} = \text{End}_T(E(T_T))$ là vành tựa duo phải (trái) bởi Định lý 1.2.2. Lấy $t \in T$, gọi $\varphi_t : T \rightarrow T$ xác định

bởi $\varphi_t(x) = tx$ với mọi $x \in T$. Khi đó, φ_t là tự đồng cấu. Mà $E(T_T)$ là môđun nội xạ nên tồn tại tự đồng cấu $\bar{\varphi}_t : E(T_T) \rightarrow E(T_T)$ là mở rộng của φ_t . Xét ánh xạ $\phi : T \rightarrow \bar{T}$, trong đó $\phi(t) = \bar{\varphi}_t$. Ta kiểm tra được ϕ là đơn cấu vành và $\phi(1_T) = id_T$. Vì vậy, vành T có thể được xem như là vành con của $\bar{T}$ (cùng phần tử đơn vị) và $\mathbb{M}_n(T)$ là vành con của $\mathbb{M}_n(\bar{T})$.

Gọi $\{M_i\}$ là họ các ideal phải cực đại của vành tựa duo $\bar{T}$, suy ra mỗi M_i là ideal hai phía và $J(\bar{T}) = \bigcap M_i$. Khi đó, $\bar{T}/M_i$ là vành chia, dẫn đến $\mathbb{M}_n(\bar{T}/M_i)$ là vành Artin đơn và hữu hạn trực tiếp. Xét đồng cấu vành

$$\varphi : \mathbb{M}_n(\bar{T}) \rightarrow \prod_i \mathbb{M}_n(\bar{T}/M_i).$$

Ta có $\text{Ker}(\varphi) = \mathbb{M}_n(J(\bar{T})) = J(\mathbb{M}_n(\bar{T}))$. Vì $\mathbb{M}_n(\bar{T}/M_i)$ là vành hữu hạn trực tiếp nên $\prod_i \mathbb{M}_n(\bar{T}/M_i)$ là vành hữu hạn trực tiếp. Do đó, $\mathbb{M}_n(\bar{T})/J(\mathbb{M}_n(\bar{T}))$ là vành hữu hạn trực tiếp. Suy ra $\mathbb{M}_n(\bar{T})$ là vành hữu hạn trực tiếp, dẫn đến $\mathbb{M}_n(T)$ cũng là vành hữu hạn trực tiếp. Vậy, $\mathbb{M}_n(R)$ là vành hữu hạn trực tiếp hay R là vành ổn định hữu hạn. $\square$

3.2.3. Môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức

Nội dung định lý sau là đặc trưng của môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức.

Định lý 3.2.27. *Cho $K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ là vành Artin trái và (X, Y, f) là K -môđun bất biến lũy linh. Khi đó,*

- (1) Y là S -môđun bất biến lũy linh.
- (2) $H = \{x \in X \mid f(x \otimes m) = 0, \forall m \in M\}$ là R -môđun bất biến lũy linh.

Chứng minh. Vì K là vành Artin trái nên R và S là các vành Artin trái bởi Định lý 1.3.43.

(1) Gọi Y_0 là môđun con bất kỳ của Y và $\varphi : Y_0 \rightarrow Y_0$ là S -tự đồng cấu lũy linh. Khi đó, biểu đồ

$$\begin{array}{ccc} 0 \otimes_R M & \xrightarrow{0} & Y_0 \\ \downarrow 0 \otimes 1_M & & \downarrow \iota_2 \\ X \otimes_R M & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

là giao hoán nên $(0, Y_0, 0)$ là môđun con của K -môđun (X, Y, f) . Xét ánh xạ $\gamma = (0, \varphi) : (0, Y_0, 0) \rightarrow (0, Y_0, 0)$. Khi đó, γ là K -tự đồng cấu lũy linh của $(0, Y_0, 0)$. Mặt

khác, vì (X, Y, f) là K -môđun bất biến lũy linh trên vành Artin trái nên tồn tại K -tự đồng cấu lũy linh $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ của (X, Y, f) sao cho θ là mở rộng của γ bởi Bổ đề 1.3.24. Do đó, $\theta_2 : Y \rightarrow Y$ là mở rộng của φ và θ_2 là tự đồng cấu lũy linh của Y . Áp dụng Bổ đề 1.3.24, Y là S -môđun bất biến lũy linh.

(2) Gọi X_0 là môđun con tùy ý của H và $\beta : X_0 \rightarrow X_0$ là R -tự đồng cấu lũy linh. Suy ra $(X_0, 0, 0)$ là môđun con của K -môđun (X, Y, f) . Đặt $\delta = (\beta, 0) : (X_0, 0, 0) \rightarrow (X_0, 0, 0)$. Vì β là R -tự đồng cấu lũy linh của X_0 nên δ là K -tự đồng cấu lũy linh của $(X_0, 0, 0)$. Mà (X, Y, f) là K -môđun bất biến lũy linh nên tồn tại tự đồng cấu lũy linh $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ của (X, Y, f) sao cho ω là mở rộng của δ bởi Bổ đề 1.3.24, nghĩa là biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes_R M & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \omega_1 \otimes 1_M & & \downarrow \omega_2 \\ X \otimes_R M & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Từ đó suy ra $\omega_2 \circ f = f \circ (\omega_1 \otimes 1_M)$. Lấy $x \in H$, ta có $f(x \otimes m) = 0$ với mọi $m \in M$. Mà $\omega_2 \circ f(x \otimes m) = f \circ (\omega_1 \otimes 1_M)(x \otimes m)$ nên $f(\omega_1(x) \otimes m) = 0$, dẫn đến $\omega_1(x) \in H$. Vì vậy, $\omega_1(H) \leq H$. Vì $\omega_1 : X \rightarrow X$ là mở rộng của $\beta : X_0 \rightarrow X_0$ nên $\omega_1(x_0) = \beta(x_0)$ với mọi $x_0 \in X_0$, suy ra $\omega_1|_H(x_0) = \beta(x_0)$. Như vậy, $\omega_1|_H : H \rightarrow H$ là mở rộng của β . Mặt khác, vì $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ là tự đồng cấu lũy linh của (X, Y, f) nên ω_1 là tự đồng cấu lũy linh của X . Từ đó dẫn đến $\omega_1|_H$ là tự đồng cấu lũy linh của H . Vậy, H là R -môđun bất biến lũy linh. $\square$

Từ Định lý 3.2.27, chúng tôi suy ra hệ quả sau:

Hệ quả 3.2.28. Cho $K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ là vành Artin trái. Nếu K là $\mathfrak{n}$ -vành phải thì S là $\mathfrak{n}$ -vành phải và $l_R(M)$ là idêan phải bất biến lũy linh của R .

Chứng minh. Gọi Y là idêan phải bất kỳ của S . Do K là $\mathfrak{n}$ -vành phải nên $(0, Y, 0)$ là idêan phải bất biến lũy linh. Áp dụng Định lý 3.2.27, Y là idêan phải bất biến lũy linh. Do đó, S là $\mathfrak{n}$ -vành phải.

Vì K là $\mathfrak{n}$ -vành phải nên $(R, M \oplus S, f)$ là môđun bất biến lũy linh, trong đó S -đồng cấu $f : R \otimes_R M \rightarrow M \oplus S$ với $f(x \otimes m) = xm$, $x \in R$ và $m \in M$. Áp dụng Định lý 3.2.27,

$$H = \{x \in R \mid f(x \otimes m) = 0, \forall m \in M\} = \{x \in R \mid xm = 0, \forall m \in M\} = l_R(M)$$

là idêan phải bất biến lũy linh. Vậy, $l_R(M)$ là idêan phải bất biến lũy linh của R . $\square$

Mệnh đề 3.2.29. Cho $K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ là vành Artin trái và (X, Y, f) là K -môđun.

Nếu Y là S -môđun bất biến lũy linh và $H = \{x \in X \mid f(x \otimes m) = 0, \forall m \in M\}$ là R -môđun bất biến lũy linh thì $(H, Y, 0)$ là K -môđun bất biến lũy linh.

Chứng minh. Giả sử (X_0, Y_0, f_0) là môđun con tùy ý của $(H, Y, 0)$ và $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : (X_0, Y_0, f_0) \rightarrow (X_0, Y_0, f_0)$ là K -tự đồng cấu lũy linh. Khi đó, $\alpha_1 : X_0 \rightarrow X_0$ và $\alpha_2 : Y_0 \rightarrow Y_0$ là các tự đồng cấu lũy linh. Từ biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccc} X_0 \otimes_R M & \xrightarrow{f_0} & Y_0 \\ \downarrow \iota_1 \otimes 1_M & & \downarrow \iota_2 \\ H \otimes_R M & \xrightarrow{0} & Y \end{array}$$

chúng ta suy ra $\iota_2 \circ f_0 = 0 \circ (\iota_1 \otimes 1_M) = 0$, dẫn đến $f_0 = 0$. Theo giả thiết, K là vành Artin trái nên R và S cũng là các vành Artin trái. Vì H và Y là các môđun bất biến lũy linh nên tồn tại các tự đồng cấu lũy linh $\beta_1 : H \rightarrow H$ và $\beta_2 : Y \rightarrow Y$ sao cho β_1 là mở rộng của α_1 và β_2 là mở rộng của α_2 bởi Bổ đề 1.3.24. Đặt $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, suy ra β là mở rộng của α . Mặt khác, vì biểu đồ

$$\begin{array}{ccc} H \otimes_R M & \xrightarrow{0} & Y \\ \downarrow \beta_1 \otimes 1_M & & \downarrow \beta_2 \\ H \otimes_R M & \xrightarrow{0} & Y \end{array}$$

là giao hoán nên β là tự đồng cấu lũy linh của $(H, Y, 0)$. Áp dụng Bổ đề 1.3.24, $(H, Y, 0)$ là K -môđun bất biến lũy linh. $\square$

Cho (X, Y, f) là K -môđun, xét R -đồng cấu:

$$\begin{aligned} \tilde{f} : X &\rightarrow \text{Hom}_S(M, Y) \\ x &\mapsto \tilde{f}(x) : M \rightarrow Y \\ m &\mapsto \tilde{f}(x)(m) = f(x \otimes m). \end{aligned}$$

Trong mệnh đề tiếp theo, chúng tôi xác định điều kiện đủ để K -môđun (X, Y, f) bất biến lũy linh.

Mệnh đề 3.2.30. Cho $K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ là vành Artin trái và (X, Y, f) là K -môđun thỏa mãn các điều kiện:

- (1) Y là S -môđun bất biến lũy linh.
 (2) $\tilde{f}$ là đẳng cấu của các R -môđun.
 (3) Tập $\{x \in X \mid f(x \otimes m) = 0, \forall m \in M\} = 0$.

Khi đó, (X, Y, f) là K -môđun bất biến lũy linh.

Chứng minh. Gọi (X_0, Y_0, f_0) là môđun con tùy ý của (X, Y, f) và $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : (X_0, Y_0, f_0) \rightarrow (X, Y, f)$ là K -tự đồng cấu lũy linh. Khi đó, $\alpha_1 : X_0 \rightarrow X$, $\alpha_2 : Y_0 \rightarrow Y$ là các tự đồng cấu lũy linh và biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} X_0 \otimes_R M & \xrightarrow{f_0} & Y_0 \\ \alpha_1 \otimes 1_M \downarrow & & \downarrow \alpha_2 \\ X \otimes_R M & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Do đó, ta có $\alpha_2 \circ f_0 = f \circ (\alpha_1 \otimes 1_M)$. Vì Y là môđun bất biến lũy linh nên tồn tại tự đồng cấu lũy linh $\beta_2 : Y \rightarrow Y$ sao cho β_2 là mở rộng của α_2 .

Lấy $x \in X$, với mọi $m \in M$, đặt $\theta(m) = \beta_2(f(x \otimes m))$. Ta kiểm tra được $\theta : M \rightarrow Y$ là S -đồng cấu. Theo giả thiết, $\tilde{f}$ là đẳng cấu nên tồn tại duy nhất $x' \in X$ sao cho $\tilde{f}(x') = \theta$. Khi đó, với mọi $m \in M$, ta có:

$$f(x' \otimes m) = \tilde{f}(x')(m) = \theta(m) = \beta_2(f(x \otimes m)).$$

Xét tự đồng cấu $\beta_1 : X \rightarrow X$ xác định bởi $\beta_1(x) = x'$. Vì $\{x \in X \mid f(x \otimes m) = 0, \forall m \in M\} = 0$ nên β_1 là R -tự đồng cấu lũy linh và $f \circ (\beta_1 \otimes 1_M) = \beta_2 \circ f$. Do đó, biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes_R M & \xrightarrow{f} & Y \\ \beta_1 \otimes 1_M \downarrow & & \downarrow \beta_2 \\ X \otimes_R M & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

Điều này dẫn đến $\beta = (\beta_1, \beta_2) : (X, Y, f) \rightarrow (X, Y, f)$ là K -tự đồng cấu lũy linh.

Chúng ta chứng minh β_1 là mở rộng của α_1 . Với mọi $x_0 \in X_0$, $m \in M$, từ điều kiện $\alpha_2 \circ f_0 = f \circ (\alpha_1 \otimes 1_M)$ suy ra $(\alpha_2 \circ f_0)(x_0 \otimes m) = f(\alpha_1(x_0) \otimes m)$. Mà β_2 là mở rộng của α_2 nên $\alpha_2 \circ f_0(x_0 \otimes m) = \beta_2 \circ f_0(x_0 \otimes m)$. Lại có, $(X_0, Y_0, f_0) \leq (X, Y, f)$ nên $f_0(x_0 \otimes m) = f(x_0 \otimes m)$. Từ đó dẫn đến $\beta_2 \circ f_0(x_0 \otimes m) = \beta_2 \circ f(x_0 \otimes m)$. Từ điều kiện $\beta_2 \circ f = f \circ (\beta_1 \otimes 1_M)$ suy ra $\beta_2 \circ f(x_0 \otimes m) = f(\beta_1(x_0) \otimes m)$. Do đó, $f(\beta_1(x_0) \otimes m) = f(\alpha_1(x_0) \otimes m)$ hay $\tilde{f}(\beta_1(x_0)) = \tilde{f}(\alpha_1(x_0))$. Vì $\tilde{f}$ là đẳng cấu nên

$\beta_1(x_0) = \alpha_1(x_0)$ hay β_1 là mở rộng của α_1 , suy ra β là mở rộng của α . Vì vậy, (X, Y, f) là môđun bất biến lũy linh. $\square$

Đặc biệt, xem vành K là K -môđun trên chính nó, K có dạng $(R, M \oplus S, f)$, trong đó $f : R \otimes_R M \rightarrow M \oplus S$ là S -đồng cấu. Áp dụng Mệnh đề 3.2.30, chúng tôi được kết quả sau.

Hệ quả 3.2.31. Cho $K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ là vành Artin trái và $\tilde{f}$ là đẳng cấu của các R -môđun. Nếu môđun con của S -môđun phải $M \oplus S$ là bất biến lũy linh và $l_R(M) = \{r \in R \mid rm = 0, \forall m \in M\} = 0$ thì K là $\mathbf{n}$ -vành phải.

KẾT LUẬN CỦA CHƯƠNG 3

Trong chương này, chúng tôi đã chứng minh một số kết quả chính như sau:

Trong phần thứ nhất, chúng tôi chỉ ra cấu trúc của a -vành phải I -hữu hạn. Theo đó, mỗi a -vành phải I -hữu hạn là tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn và một vành nửa hoàn chỉnh cơ sở (Định lý 3.1.4). Hơn nữa, chúng tôi chứng minh rằng mỗi a -vành phải nửa hoàn chỉnh có để cốt yếu không phân tích được, không là vành đơn và có các phần tử lũy đẳng không tầm thường là vành tựa Frobenius (Định lý 3.1.13). Từ kết quả này, chúng tôi kết luận điều kiện đủ để lớp a -vành phải cũng là q -vành phải (Hệ quả 3.1.14).

Trong phần thứ hai, chúng tôi phân tích mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải thành tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn chính phương đầy đủ và một vành không chính phương phải trong Định lý 3.2.13. Chúng tôi chỉ ra mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải có tính chất giản ước trong (Định lý 3.2.15). Ngoài ra, chúng tôi chứng minh rằng mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải chính quy có để phải bằng không là vành chính quy mạnh (Định lý 3.2.20). Về mối quan hệ với vành Artin nửa đơn, chúng tôi khẳng định một vành R là Artin nửa đơn khi và chỉ khi vành các ma trận vuông cấp n trên R là $\mathbf{n}$ -vành phải với n là số nguyên dương (Định lý 3.2.23). Trong Định lý 3.2.26, chúng tôi khẳng định mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải ổn định hữu hạn. Khi khảo sát môđun trên vành ma trận tam giác hình thức K , chúng tôi chỉ ra rằng nếu K -môđun (X, Y, f) bất biến lũy linh thì Y là S -môđun bất biến lũy linh và $H = \{x \in X \mid f(x \otimes m) = 0, \forall m \in M\}$ là R -môđun bất biến lũy linh (Định lý 3.2.27). Cuối cùng, trong Mệnh đề 3.2.30, chúng tôi chỉ ra điều kiện đủ để K -môđun (X, Y, f) bất biến lũy linh, đó là: Y là S -môđun bất biến lũy linh, ánh xạ $\tilde{f} : X \rightarrow \text{Hom}_S(M, Y)$ với $\tilde{f}(x)(m) = f(x \otimes m)$ là đẳng cấu R -môđun và tập $\{x \in X \mid f(x \otimes m) = 0, \forall m \in M\} = 0$.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết luận

Một số kết quả chính chúng tôi thu được trong luận án như sau:

- (1) Đặc trưng lớp vành coherent trái và hoàn chỉnh phải thông qua tính giả xạ ảnh của tích trực tiếp các môđun xạ ảnh (phẳng) (Định lý 2.1.9).
- (2) Đặc trưng lớp vành nửa di truyền và S -vành thông qua tính giả xạ ảnh của môđun con hữu hạn sinh của môđun phải (trái) phẳng (Định lý 2.2.3).
- (3) Đặc trưng lớp vành nửa di truyền và Π -coherent thông qua tính giả xạ ảnh của môđun phải (trái) hữu hạn sinh xoắn (Định lý 2.2.5).
- (4) Đặc trưng lớp vành di truyền và nửa nguyên sơ thông qua tính giả xạ ảnh của môđun con của môđun phẳng hay tính giả xạ ảnh của môđun xoắn (Định lý 2.2.7, Định lý 2.2.8).
- (5) Đặc trưng lớp vành nửa địa phương thông qua tính giả xạ ảnh của môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy (Định lý 2.3.2).
- (6) Khẳng định đặc trưng của lớp vành Artin idêan chính là lớp vành có lớp môđun giả xạ ảnh trùng với lớp môđun giả nội xạ (Định lý 2.3.3).
- (7) Mô tả cấu trúc của lớp a -vành phải I -hữu hạn (Định lý 3.1.4).
- (8) Nghiên cứu các a -vành phải không phân tích được thông qua điều kiện Nakayama và chứng minh lớp vành này có lớp môđun nội xạ và xạ ảnh trùng nhau (Định lý 3.1.13).
- (9) Phân tích các $\mathbf{n}$ -vành phải thành tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn chính phương đầy đủ và một vành không chính phương phải (Định lý 3.2.13).
- (10) Khẳng định tính chất giản ước trong của $\mathbf{n}$ -vành phải (Định lý 3.2.15).
- (11) Mô tả đặc trưng của môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức (Định lý 3.2.27).

2. Kiến nghị

Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ xem xét mỗi môđun nửa nguyên thủy giả xạ ảnh có suy ra được rằng vành là nửa địa phương hay không. Ngoài ra, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu cấu trúc của $\mathbf{n}$ -vành trong trường hợp vành là vành ma trận tam giác hình thức.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

- [1] Lê Văn Thuyết và Trương Công Quỳnh (2019), *Giáo trình Môđun và Vành*, Nhà xuất bản Đại học Huế, Huế.

Tiếng Anh

- [2] Alahmadi, A., Facchini, A. and Nguyen Khanh Tung (2015), “Automorphism invariant modules”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 133, pp. 241-259.
- [3] Anderson, F. W. and Fuller, K. R. (1974), *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York.
- [4] Baer, R. (1940), “Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46(10), pp. 800-806.
- [5] Birkenmeier, G. F., Park, J. K. and Rizvi, S. T. (2013), *Extensions of Rings and Modules*, Springer, New York.
- [6] Byrd, K. A. (1970), “Some characterizations of uniserial rings”, *Math. Ann.*, 186, pp. 163-170.
- [7] Camillo, V. (1990), “Coherence for polynomial rings”, *J. Algebra*, 132(1), pp. 72-76.
- [8] Cartan, H. and Eilenberg, S. (1956), *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton.
- [9] Chase, S. U. (1960), “Direct products of modules”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 97(3), pp. 457-473.
- [10] Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. and Wisbauer, R. (2006), *Lifting Modules*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin.
- [11] Colby, R. R. and Rutter, E. A. (1971), “Generalizations of QF-3 algebras”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 153, pp. 371-386.
- [12] Dickson, S. E. and Fuller, K. R. (1969), “Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope”, *Pacific J. Math.*, 31(3), pp. 655-658.
- [13] Er, N., Singh, S. and Srivastava, A. K. (2013), “Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls”, *J. Algebra*, 379, pp. 223-229.

- [14] Faith, C. (1976), *Algebra II: Ring Theory*, Springer-Verlag, Berlin.
- [15] Fuller, K. R. (1969), "On indecomposable injectives over artinian rings", *Pacific J. Math.*, 29(1), pp. 115-135.
- [16] Golan, J. S. (1971), "Characterization of rings using quasiprojective modules II", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 28(2), pp. 337-343.
- [17] Guil Asensio, P. A. and Srivastava, A. K. (2013), "Automorphism-invariant modules satisfy the exchange property", *J. Algebra*, 388, pp. 101-106.
- [18] Guil Asensio, P. A. and Srivastava, A. K. (2015), "Automorphism-invariant modules", *Contemp. Math.*, 634, pp. 19-30.
- [19] Nguyen Thi Thu Ha and Truong Thi Thuy Van (2024), "Structure of rings via pseudo-projective modules", *Filomat*, 38(18), pp. 6423-6432.
- [20] Hill, D. A. (1973), "Semi-perfect q -rings", *Math. Ann*, 200, pp. 113-121.
- [21] Hirano, Y., D. V. Huynh and Park, J. K. (1995), "Rings characterised by semiprimitive modules", *Bull. Austral. Math. Soc.*, 52, pp. 107-116.
- [22] Jain, S. K., Mohamed, S. H. and Singh, S. (1969), "Rings in which every right ideal is quasi injective", *Pacific J. Math*, 31(1), pp. 73-79.
- [23] Jain, S. K. and Singh, S. (1975), "Quasi-injective and pseudo-injective modules", *Canad. Math. Bull.*, 18(3), pp. 359-366.
- [24] Johnson, R. E. and Wong, E. T. (1961), "Quasi-injective modules and irreducible rings", *J. Lond. Math. Soc.*, 36(1), pp. 260-268.
- [25] Kasch, F. (1982), *Modules and Ring*, Academic Press, London.
- [26] Koşan, M. T. and Truong Cong Quynh (2017), "Nilpotent-invariant modules and rings", *Comm. Algebra*, 45(7), pp. 2775-2782.
- [27] Koşan, M. T., Truong Cong Quynh and Srivastava, A. K. (2016), "Rings with each right ideal automorphism invariant", *J. Pure Appl. Algebra*, 220(4), pp. 1525-1537.
- [28] Krylov, P. and Tuganbaev, A. (2017), *Formal Matrices*, Springer, Cham.
- [29] Lam, T. Y. (1991), *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, New York.
- [30] Lam, T. Y. (1999), *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, New York.

- [31] Lam, T. Y. (2004), “A crash course on stable range, cancellation, substitution, and exchange”, *J. Algebra Appl.*, 3(3), pp. 301-343.
- [32] Lee, T. K. and Zhou, Y. (2013), “Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls”, *J. Algebra Appl.*, 12(2), pp. 1250159.1-1250159.9
- [33] Mohamed, S. H. and Muller, B. J. (1990), *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [34] Nicholson, W. K. and Yousif, M. F. (2003), *Quasi-Frobenius rings*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [35] Osofsky, B. (1964), “Rings all of whose finitely generated modules are injective”, *Pacific J. Math.*, 14(2), pp. 645-650.
- [36] Puninski, G. and Rothmaler, P. (2004), “When every finitely generated flat is projective”, *J. Algebra*, 277(2), pp. 542-558.
- [37] Truong Cong Quynh, Abyzov, A. and Dinh Duc Tai (2021), “Modules which are invariant under nilpotents of their envelopes and covers”, *J. Algebra Appl.*, 20(12), pp. 2150218.1-2150218.22.
- [38] Truong Cong Quynh, Abyzov, A. and Dao Thi Trang (2022), “Rings all of whose finitely generated ideals are automorphism-invariant”, *J. Algebra Appl.*, 21(8), pp. 2250159.1-2250159.19.
- [39] Truong Cong Quynh and Koşan, M. T. (2015), “On automorphism-invariant modules”, *J. Algebra Appl.*, 14(5), pp. 1550074.1-1550074.11.
- [40] Truong Cong Quynh, Koşan, M. T. and Le Van Thuyet (2020), “On automorphism-Invariant Rings with Chain Conditions”, *Vietnam J. Math.*, 48(1), pp. 23-29.
- [41] Truong Cong Quynh and Truong Thi Thuy Van (2024), “On Nilpotent-invariant One-sided Ideals”, *Acta Math. Vietnam.*, 49, pp. 115-128.
- [42] Rizvi, S. T. and Roman, C. S. (2009), “On direct sums of Baer modules”, *J. Algebra*, 321(2), pp. 682-696.
- [43] Singh, S. and Jain, S. K. (1967), “On pseudo injective modules and self pseudo injective ring”, *J. Math. Sci.*, 2(1), pp. 23-31.
- [44] Singh, S. and Srivastava, A. K. (2014), “Rings of Invariant Module Type and Automorphism-Invariant Modules”, *Ring Theory and Its Applications (Contemporary Mathematics)*, 609, pp. 299-311.

- [45] Small, L. W. (1967), “Semihereditary rings”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73(5), pp. 656-658.
- [46] Tiwary, A. K. and Pandeya, B. M. (1978), “Pseudo projective and pseudo injective modules”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 9(9), pp. 941-949.
- [47] Dao Thi Trang and Banh Duc Dung (2024), “Endomorphism rings and formal matrix rings of pseudo-projective modules”, *Filomat*, 38(4), pp. 1389-1400.
- [48] Truong Thi Thuy Van, Alghamdi, A. M. and Alkinani, A. A. (2024), “On semiperfect a -rings”, *Ukr. Math. J.*, 76(6), pp. 1025-1034.
- [49] Warfield, R. B. (1972), “Exchange rings and decompositions of modules”, *Math. Ann.*, 199, pp. 31-36.
- [50] Wisbauer, R. (1991), *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, Reading.
- [51] Wu, L. E. T. and Jans, J. P. (1967), “On quasi projective”, *Illinois J. Math.*, 11(3), pp. 439-448.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ

- (1) Trương Thị Thúy Vân (2023), “Các đặc trưng của PC2-môđun”, *Tạp chí Khoa học và Công nghệ - Đại học Đà Nẵng*, 21(3), pp. 58-62.
- (2) Nguyen Thi Thu Ha and Truong Thi Thuy Van (2024), “Structure of rings via pseudo-projective modules”, *Filomat*, 38(18), pp. 6423-6432.
- (3) Truong Cong Quynh and Truong Thi Thuy Van (2024), “On Nilpotent-invariant One-sided Ideals”, *Acta Math. Vietnam.*, 49, pp. 115-128.
- (4) Truong Thi Thuy Van, Alghamdi, A. M. and Alkinani, A. A. (2024), “On semiperfect a -rings”, *Ukr. Math. J.*, 76(6), pp. 1025-1034.

CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN ĐƯỢC THẢO LUẬN VÀ BÁO CÁO TẠI

- (1) Hội nghị Đại số - Lý thuyết số - Hình học - Tô pô, Trường Đại học Đà Lạt, 5/2024.
- (2) Hội thảo Quốc tế về Nghiên cứu, Giảng dạy và Ứng dụng Toán học, Trường Đại học Nguyễn Tất Thành, 6/2024.
- (3) Hội nghị Toán học Miền Trung - Tây Nguyên lần thứ 5, Trường Đại học Khánh Hòa, 8/2024.
- (4) Sêmina với Tổ Đại số - Hình học, Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, 12/2024.