

ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRƯỜNG THỊ THÚY VÂN

TÍNH NỘI XẠ, XẠ ẢNH CỦA MÔĐUN VÀ MỘT SỐ LỚP VÀNH LIÊN QUAN

Ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 9460104

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Đà Nẵng - Năm 2025

Công trình được hoàn thành tại
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Người hướng dẫn khoa học:

1. PGS.TS. Trương Công Quỳnh

2. TS. Trần Hoài Ngọc Nhân

Phản biện 1:

Phản biện 2:

Phản biện 3:

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá
Luận án cấp Trường ngành Đại số và lý thuyết số
họp tại Trường Đại học Sư phạm vào
ngày.....tháng.....năm 2025

Có thể tìm hiểu luận án tại:

Thư viện Quốc gia;

Thư viện Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng.

Mục lục

MỞ ĐẦU	1
CHƯƠNG 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	7
1.1 Một số ký hiệu và khái niệm liên quan	7
1.2 Các mở rộng của môđun nội xạ và xạ ảnh	8
1.3 Một số lớp vành liên quan	10
CHƯƠNG 2. LỚP MÔĐUN GIẢ XẠ ẢNH VÀ CÁC VÀNH LIÊN QUAN	13
2.1 Môđun giả xạ ảnh trên vành nửa hoàn chỉnh, vành hoàn chỉnh	13
2.2 Môđun giả xạ ảnh trên vành nửa di truyền, vành di truyền	14
2.3 Môđun giả xạ ảnh trên vành nửa địa phương và vành Artin idêan chính	17
CHƯƠNG 3. LỚP A-VÀNH VÀ TỔNG QUÁT	

HÓA	18
3.1 Lớp a -vành phải	18
3.1.1 Lớp a -vành phải I -hữu hạn	18
3.1.2 Lớp a -vành phải nửa hoàn chỉnh có đề cốt yếu	18
3.2 Vành mà mỗi idêan phải bất biến lũy linh	19
3.2.1 Định nghĩa và các tính chất	19
3.2.2 Sự phân tích của n -vành phải và các vành liên quan	20
3.2.3 Môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức	21
KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	22
DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ	24

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Khái niệm môđun nội xạ được Baer [4] giới thiệu đầu tiên vào năm 1940. Một môđun M được gọi là nội xạ nếu mọi đồng cấu từ môđun con A của môđun N đến M mở rộng được đến đồng cấu từ N vào M . Đối ngẫu với khái niệm nội xạ là xạ ảnh, được Cartan và Eilenberg [8] đưa ra vào năm 1956. Một môđun M được gọi là xạ ảnh nếu với mọi môđun A , với mỗi môđun con X của A , mọi đồng cấu $\varphi : M \rightarrow A/X$ có thể nâng đến đồng cấu $\phi : M \rightarrow A$.

Một trong các mở rộng quan trọng của lớp môđun nội xạ là lớp môđun tựa nội xạ. Lớp môđun này được Johnson và Wong [24] giới thiệu vào năm 1961, đó là lớp môđun bất biến qua các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó. Đối ngẫu với khái niệm tựa nội xạ là khái niệm tựa xạ ảnh. Khái niệm này đã được Wu và Jans [51] phát biểu vào năm 1967. Một môđun M được gọi là tựa xạ ảnh nếu với mỗi môđun con X của M , mọi đồng cấu $f : M \rightarrow M/X$ có thể nâng đến tự đồng cấu của M .

Năm 1967, Singh và Jain [43] đã đưa ra khái niệm môđun giả nội xạ, đó là mở rộng của lớp môđun tựa nội xạ. Một môđun M được gọi là giả nội xạ nếu với mọi môđun con N của M , mỗi đơn cấu từ N vào M mở rộng đến tự đồng cấu của M . Năm 1969, Dickson và Fuller [12] đã nghiên cứu lớp môđun không phân tích được tựa nội xạ. Xuất phát từ kết quả này, Lee và Zhou [32] đưa ra khái niệm môđun bất biến đẳng cấu vào năm 2013. Một môđun là bất biến đẳng cấu nếu môđun đó bất biến qua các tự đẳng cấu của bao nội xạ. Sau đó, Er, Singh và Srivastava [13] đã chỉ ra rằng lớp môđun bất biến đẳng cấu và lớp môđun giả nội xạ là trùng nhau. Đối ngẫu với khái niệm giả nội xạ là giả xạ ảnh. Trong [46],

một môđun M được gọi là giả xạ ảnh nếu với mọi môđun A và các toàn cấu $f, g : M \rightarrow A$ thì luôn tồn tại tự đồng cấu h của M sao cho $f = g \circ h$. Tiwary và Pandeya [46] đã sử dụng tính chất giả xạ ảnh để đặc trưng vành Artin nửa đơn và vành hoàn chỉnh phải. Năm 2024, Trang và Dung [47] đã nghiên cứu môđun giả xạ ảnh để đặc trưng vành Artin nửa đơn và vành ma trận tam giác hình thức. Tuy nhiên, nghiên cứu về đặc trưng các lớp vành cổ điển như vành di truyền, nửa địa phương hoặc Artin idêan chính thông qua lớp môđun giả xạ ảnh vẫn còn hạn chế. Xuất phát từ điều này, luận án tập trung nghiên cứu tính chất giả xạ ảnh của môđun nhằm đặc trưng một số lớp vành cổ điển.

Tiếp tục nghiên cứu mở rộng của môđun bất biến đẳng cấu, Koşan và Quynh [26] đã giới thiệu môđun bất biến lũy linh vào năm 2017. Một môđun M được gọi là bất biến lũy linh nếu M bất biến qua các tự đồng cấu lũy linh của bao nội xạ. Năm 2021, Quynh, Abyzov và Tai [37] đã mở rộng các tính chất và đối ngẫu khái niệm trên. Trong luận án này, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu về môđun bất biến lũy linh, cụ thể là nghiên cứu trên vành ma trận tam giác hình thức.

Năm 1969, Jain, Mohamed và Singh [22] đã nghiên cứu cấu trúc vành thông qua tính tựa nội xạ của lớp idêan một phía. Các tác giả này đã định nghĩa lớp vành mà mỗi idêan phải tựa nội xạ là q -vành phải, từ đó đặc trưng được vành Artin nửa đơn. Năm 2014, Singh và Srivastava [44] đã giới thiệu a -vành phải, đó là vành mà mỗi idêan phải là bất biến đẳng cấu. Năm 2016, Koşan, Quynh và Srivastava [27] đã mô tả cấu trúc của mỗi a -vành phải. Một cách tự nhiên, chúng tôi đặt ra vấn đề nghiên cứu lớp vành mà mọi idêan phải là bất biến lũy linh, chúng tôi gọi là n -vành

phải.

Tiếp tục nghiên cứu lớp q -vành, Hill [20] chứng minh rằng mỗi q -vành phải nửa hoàn chỉnh là tổng trực tiếp của một vành cơ sở và một vành Artin nửa đơn. Năm 2022, Quynh, Abyzov và Trang [38] đã nghiên cứu lớp vành mà mỗi ideal phải hữu hạn sinh là bất biến đẳng cấu và gọi đó là fa -vành phải. Các tác giả đã xác định cấu trúc của fa -vành phải dưới dạng vành ma trận tam giác hình thức.

Từ tính chất của vành bất biến đẳng cấu, mọi phần tử lũy đẳng nguyên thủy là lũy đẳng địa phương, ta có một vành không chứa tập vô hạn các lũy đẳng trực giao bất biến đẳng cấu phải là vành nửa hoàn chỉnh. Tuy nhiên, tính chất ideal bất biến đẳng cấu trong lớp a -vành phải nửa hoàn chỉnh, đặc biệt với điều kiện I -hữu hạn vẫn chưa được nghiên cứu đầy đủ. Từ điều này dẫn đến có thể nghiên cứu lớp a -vành phải I -hữu hạn thông qua vành nửa hoàn chỉnh cơ sở. Đây cũng chính là vấn đề nghiên cứu của chúng tôi.

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu cấu trúc các vành thông qua tính giả xạ ảnh của các môđun và cấu trúc vành ma trận tam giác hình thức với điều kiện bất biến lũy linh của các môđun. Bên cạnh đó, một số đặc trưng của các lớp vành thông qua tính bất biến đẳng cấu và bất biến lũy linh của các ideal một phía đã được nghiên cứu và phát triển.

Từ những kết quả đã đạt được về lớp môđun giả xạ ảnh, lớp môđun bất biến đẳng cấu và lớp môđun bất biến lũy linh, chúng tôi nhận thấy rằng để nghiên cứu môđun giả xạ ảnh đặc trưng các vành, nghiên cứu môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức, nghiên cứu vành mà mỗi ideal bất biến đẳng cấu

và vành mà mỗi ideal bất biến lũy linh thì cần phải tìm hiểu lớp môđun nội xạ cùng các mở rộng, cũng như lớp môđun đối ngẫu của nó. Từ đó, chúng tôi chọn đề tài luận án là **“Tính nội xạ, xạ ảnh của môđun và một số lớp vành liên quan”**.

2. Mục đích nghiên cứu

- Xác định đặc trưng của các vành cổ điển (như vành hoàn chỉnh, nửa hoàn chỉnh, di truyền, nửa di truyền, nửa địa phương, Artin ideal chính) thông qua môđun giả xạ ảnh.

- Phân tích cấu trúc, đặc trưng của a -vành phải I -hữu hạn có để cốt yếu.

- Nghiên cứu tính chất của vành mà mọi ideal phải bất biến lũy linh và môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án bao gồm:

- Các lớp môđun như giả xạ ảnh, bất biến đẳng cấu, bất biến lũy linh.

- Các lớp vành cổ điển như hoàn chỉnh phải, nửa hoàn chỉnh, di truyền phải, nửa di truyền phải, nửa địa phương, Artin ideal chính; cùng với các lớp vành mà trong đó mọi ideal phải là bất biến đẳng cấu hoặc bất biến lũy linh và vành ma trận tam giác hình thức.

Phạm vi nghiên cứu được giới hạn trong phạm trù các môđun phải (trái), với R là một vành kết hợp, có đơn vị, thuộc các lớp vành cổ điển, lớp a -vành, lớp n -vành, vành ma trận tam giác hình thức. Ngoài ra, luận án cũng nghiên cứu các lớp môđun: giả xạ ảnh, bất biến đẳng cấu, bất biến lũy linh.

4. Phương pháp nghiên cứu

Đề tài nghiên cứu thuộc lĩnh vực khoa học cơ bản ngành toán học. Trước hết, chúng tôi đọc các tài liệu chuyên môn cùng với các bài báo liên quan đến môđun giả xạ ảnh, môđun bất biến đẳng cấu, môđun bất biến lũy linh cũng như các lớp vành cổ điển, lớp α -vành. Sau đó, chúng tôi phân tích, xử lý tài liệu, trao đổi ý kiến với giảng viên hướng dẫn và các chuyên gia để khai thác, mở rộng vấn đề cần nghiên cứu thông qua các hội thảo, seminar. Chúng tôi sử dụng các phương pháp khái quát hóa, so sánh, suy luận logic, phân loại để đề xuất những vấn đề nghiên cứu của đề tài.

5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài

Đề tài đã đưa ra đặc trưng một số lớp vành cổ điển thông qua tính giả xạ ảnh của môđun; tiếp tục nghiên cứu và mở rộng lớp α -vành phải thông qua điều kiện I -hữu hạn, đưa ra lớp vành mới là n -vành phải. Các kết quả về tính chất, đặc trưng, cấu trúc cũng như mối quan hệ giữa n -vành phải và các lớp vành khác đã bổ sung thêm các kiến thức về lý thuyết vành. Với các kết quả đạt được, có thể thấy rằng, việc nghiên cứu đề tài có ý nghĩa quan trọng trong nghiên cứu lý thuyết vành và môđun, làm phong phú thêm đặc trưng các lớp vành cổ điển, góp phần tạo động lực thúc đẩy những người nghiên cứu quan tâm đến lý thuyết vành và môđun.

6. Cấu trúc của luận án

Nội dung của luận án gồm 3 chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản trong lý thuyết vành và môđun, cần thiết cho Chương 2 và Chương 3. Trong Chương 2, chúng tôi trình bày các đặc trưng của lớp vành nửa hoàn chỉnh, vành hoàn chỉnh phải, vành nửa di truyền phải, vành di truyền phải, vành nửa địa phương và vành Artin idêan chính thông qua môđun giả xạ ảnh. Kết quả

chính của chúng tôi trong chương này là khẳng định rằng một vành là Artin idêan chính khi và chỉ khi lớp môđun giả nội xạ trùng với lớp môđun giả xạ ảnh (Định lý 2.3.3). Trong chương 3, chúng tôi nghiên cứu cấu trúc của lớp a -vành phải với điều kiện I -hữu hạn và xác định điều kiện để lớp vành này là tựa Frobenius (Định lý 3.1.13). Chúng tôi định nghĩa $\mathbf{n}$ -vành phải là một vành mà mọi idêan phải là bất biến lũy linh. Đồng thời, chúng tôi khảo sát các tính chất và sự phân tích của $\mathbf{n}$ -vành phải. Mỗi $\mathbf{n}$ -vành phải là tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn chính phương đầy đủ và một vành không chính phương phải (Định lý 3.2.13). Ngoài ra, môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức cũng được xem xét trong phần này.

CHƯƠNG 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại những khái niệm và một số tính chất cơ bản được sử dụng trong luận án.

1.1. Một số ký hiệu và khái niệm liên quan

Với vành R cho trước, chúng tôi ký hiệu M_R (${}_R M$) để chỉ M là R -môđun phải (tương ứng, trái). Khi đề cập đến R -môđun M , chúng tôi quy ước đó là R -môđun phải và viết M thay vì M_R . Với M, N là các R -môđun, đồng cấu từ M đến N được hiểu là đồng cấu R -môđun; tập hợp các R -đồng cấu môđun từ M đến N được ký hiệu là $\text{Hom}_R(M, N)$. Để chỉ tập các tự đồng cấu của R -môđun M ta dùng ký hiệu $\text{End}_R(M)$, hoặc đơn giản là $\text{End}(M)$. Căn Jacobson, đế của môđun M được ký hiệu tương ứng là $\text{Rad}(M)$ và $\text{Soc}(M)$, đặc biệt, $J(R)$ được dùng để ký hiệu cho căn Jacobson của vành R ; $\text{Soc}({}_R R)$, $\text{Soc}(R_R)$ tương ứng ký hiệu cho đế phải và đế trái của vành R .

Cho M là một R -môđun phải và tập $\emptyset \neq X \subseteq M$. Linh hóa tử phải của X trong R được ký hiệu là $r_R(X)$ và được xác định:

$$r_R(X) = \{r \in R \mid xr = 0, x \in X\}.$$

Khi $X = \{x\}$, ta viết $r_R(x)$. Ta có $r_R(X)$ là một ideal phải của vành R . Hơn nữa, nếu X là môđun con của M thì $r_R(X)$ là một ideal của R . Linh hóa tử trái của X trong R được ký hiệu là $l_R(X)$ và được định nghĩa tương tự [1, tr. 172-173].

Môđun con K của M được gọi là *cốt yếu* (hay *lớn*) trong M , ký hiệu $K \leq^e M$, nếu với mọi môđun con $L \leq M$ thỏa mãn $K \cap L = 0$ thì $L = 0$. Một đơn cấu $\alpha : M \rightarrow Q$ được gọi là *đơn cấu cốt yếu* nếu $\text{Im}(\alpha) \leq^e Q$. Đối ngẫu với khái niệm cốt yếu, môđun con K

của M được gọi là *đối cốt yếu* (hay *bé*) trong M , ký hiệu $K \ll M$, nếu với mọi môđun con $L \leq M$ sao cho $K + L = M$ thì $L = M$. Một toàn cấu $\alpha : M \rightarrow Q$ được gọi là *toàn cấu đối cốt yếu* nếu $\text{Ker}(\alpha) \ll M$ [25, Definition 5.1.1].

Môđun M được gọi là *không chính phương* nếu M không chứa tổng trực tiếp của hai môđun con khác không đẳng cấu. Môđun M được gọi là *chính phương đầy đủ* nếu mọi môđun con khác không của M chứa nghiệm chính phương khác không [33, Definition 2.34].

Môđun P được gọi là *hữu hạn biểu diễn được* nếu tồn tại dãy khớp $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow 0$, trong đó F là môđun tự do có hạng hữu hạn và K là môđun hữu hạn sinh [30, Definition 4.25].

Môđun M được gọi là *nửa nguyên thủy* nếu $\text{Rad}(M) = 0$ [21, pp. 107].

Môđun M được gọi là *có tính chất giản ước trong* nếu từ $M = A_1 \oplus B_1 = A_2 \oplus B_2$ với $A_1 \cong A_2$ suy ra $B_1 \cong B_2$ [33, Definition 1.22].

Vành R được gọi là *ổn định hữu hạn* nếu vành ma trận $\mathbb{M}_n(R)$ là hữu hạn trực tiếp [30, pp. 5].

1.2. Các mở rộng của môđun nội xạ và xạ ảnh

Môđun M được gọi là *N -nội xạ* nếu với mọi môđun con A của N thì mọi đồng cấu $f : A \rightarrow M$ mở rộng đến đồng cấu $\bar{f} : N \rightarrow M$, nghĩa là biểu đồ sau đây giao hoán:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & N \\ & & \downarrow f & \swarrow \bar{f} & \\ & & M & & \end{array}$$

Môđun M được gọi là *nội xạ* nếu M là N -nội xạ với mọi môđun N . Bên cạnh đó, Baer đã đưa ra một tiêu chuẩn để xét

tính nội xạ của các môđun mà ta thường gọi là “Tiêu chuẩn Baer”. Theo đó, môđun M là nội xạ khi và chỉ khi môđun M là R_R -nội xạ [34, pp. 6, 8].

Với môđun M , một đơn cấu $\alpha : M \rightarrow Q$ được gọi là *bao nội xạ* của M nếu Q là môđun nội xạ và α là đơn cấu cốt yếu. Ta ký hiệu bao nội xạ của môđun M là $E(M)$ [34, pp. 6].

Môđun M được gọi là *bất biến đẳng cấu* nếu $f(M) \leq M$ với mọi tự đẳng cấu f của bao nội xạ $E(M)$ [32, Definition 1].

Môđun M được gọi là *bất biến lũy linh* nếu $f(M) \leq M$ với mọi tự đồng cấu lũy linh f của bao nội xạ $E(M)$. Một vành R được gọi là *bất biến lũy linh phải* nếu R_R là môđun bất biến lũy linh [26, pp. 2776].

Môđun M được gọi là *A-xạ ảnh* nếu với mọi môđun con X của A , mọi đồng cấu $\varphi : M \rightarrow A/X$ nâng đến đồng cấu $\phi : M \rightarrow A$, nghĩa là biểu đồ sau đây giao hoán:

$$\begin{array}{ccccc} & & M & & \\ & \swarrow \phi & \downarrow \varphi & & \\ A & \longrightarrow & A/X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Môđun M được gọi là *xạ ảnh* nếu M là A -xạ ảnh với mọi môđun A . Môđun M được gọi là *tự xạ ảnh* nếu M là M -xạ ảnh [33, Definition 4.29].

Môđun M được gọi là *giả xạ ảnh* nếu mọi môđun A và các toàn cấu $f, g : M \rightarrow A$ thì luôn tồn tại tự đồng cấu $h : M \rightarrow M$ sao cho $f = g \circ h$, nghĩa là biểu đồ sau giao hoán [46, Definition 1.1]

$$\begin{array}{ccccc}
 & & M & & \\
 & \nearrow \text{ } h \text{ } \cdots \cdots & \downarrow f & & \\
 M & \xrightarrow{g} & A & \longrightarrow & 0. \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 0 & &
 \end{array}$$

Môđun P được gọi là *phủ xạ ảnh* của môđun M nếu tồn tại toàn cấu $p : P \rightarrow M$ sao cho P là môđun xạ ảnh và $\text{Ker}(p) \ll P$ [34, pp. 261]. Môđun P được gọi là *phủ giả xạ ảnh* của môđun M nếu tồn tại toàn cấu $p : P \rightarrow M$ sao cho P là môđun giả xạ ảnh và $\text{Ker}(p) \ll P$ [47, pp. 1399].

1.3. Một số lớp vành liên quan

Định nghĩa 1.3.5 ([1, tr. 146]). Một vành R được gọi là *nửa địa phương* nếu vành thương $R/J(R)$ là Artin nửa đơn.

Định nghĩa 1.3.6 ([1, tr. 150]). Một vành R được gọi là *nửa hoàn chỉnh* nếu R là nửa địa phương và mọi phần tử lũy đẳng nâng được modulo $J(R)$.

Định nghĩa 1.3.7 ([20, pp. 114]). Cho R là vành nửa hoàn chỉnh và $e \in R$ là phần tử lũy đẳng nguyên thủy. Ta nói rằng e có *chỉ số h* nếu trong mọi sự phân tích của R_R thành tổng trực tiếp của các môđun không phân tích được thì có đúng h hạng tử trực tiếp đẳng cấu với eR .

Nếu R là vành nửa hoàn chỉnh thì tồn tại một tập đầy đủ các phần tử lũy đẳng địa phương trực giao $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Giả sử $\{e_i R / e_i J(R) \mid 1 \leq i \leq n\}$ là tập hợp đại diện đầy đủ các lớp đẳng cấu của R -môđun đơn. Khi đó, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ được gọi là *tập lũy*

đẳng cơ sở của R . Nếu $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ thì vành eRe được gọi là *vành cơ sở* của R . Một vành R được gọi là *nửa hoàn chỉnh cơ sở* nếu $m = n$, nghĩa là, $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, trong đó $\{e_i\}_{i=1}^n$ là tập lũy đẳng cơ sở gồm các phần tử lũy đẳng địa phương [34, pp. 62, 260].

Định nghĩa 1.3.12 ([34, pp. 269]). Một vành R được gọi là *hoàn chỉnh phải* nếu R là nửa hoàn chỉnh và idêan $J(R)$ là T -lũy linh phải.

Định nghĩa 1.3.15 ([16, pp. 340]). Một vành R được gọi là *nửa di truyền phải* nếu mọi idêan phải hữu hạn sinh của R là xạ ảnh. Điều này cũng tương đương với mọi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun xạ ảnh là xạ ảnh. Một vành R được gọi là *nửa di truyền* nếu R là vành nửa di truyền trái và phải.

Một vành R được gọi là *di truyền phải* nếu mọi idêan phải của R là xạ ảnh. Điều này cũng tương đương với mọi môđun con của R -môđun xạ ảnh là xạ ảnh. Một vành R được gọi là *di truyền* nếu R là vành di truyền trái và phải.

Định nghĩa 1.3.17 ([36, pp. 547]). Một vành R được gọi là *S -vành phải* nếu mỗi R -môđun hữu hạn sinh phẳng là xạ ảnh.

Định nghĩa 1.3.19 ([7, pp. 72-73]). Môđun M được gọi là *coherent* nếu mỗi môđun con hữu hạn sinh của M là hữu hạn biểu diễn được. Một vành R được gọi là *coherent phải* nếu R_R là môđun coherent. Một vành R được gọi là *Π -coherent phải* nếu mỗi môđun con hữu hạn sinh của tích trực tiếp một họ tùy ý các bản sao của R là hữu hạn biểu diễn được. Vành R được gọi là *Π -coherent* nếu R là Π -coherent trái và Π -coherent phải.

Định nghĩa 1.3.22 ([1, tr. 129]). Một vành R được gọi là *nửa*

nguyên sơ nếu R là nửa địa phương và $J(R)$ là ideal lũy linh.

Định nghĩa 1.3.25 ([34, pp. 20]). Một vành được gọi là *tựa Frobenius* nếu nó là vành Artin hai phía và tự nội xạ hai phía.

Các tác giả Faith và Walker đã đưa ra một đặc trưng về vành tựa Frobenius, đó là lớp vành mà mỗi môđun xạ ảnh là nội xạ và ngược lại, cụ thể như sau:

Định lý 1.3.26 ([14, Theorem 24.20]). *Cho R là vành. Khi đó, các phát biểu sau đây là tương đương:*

- (1) *Vành R là tựa Frobenius.*
- (2) *Mỗi R -môđun nội xạ là xạ ảnh.*
- (3) *Mỗi R -môđun xạ ảnh là nội xạ.*

Từ các kết quả nghiên cứu của Fuller, Faith, Byrd ([6], [14], [15]), chúng ta khẳng định rằng trên vành Artin ideal chính, lớp môđun tựa xạ ảnh và lớp môđun đối ngẫu là trùng nhau. Chúng tôi nhắc lại kết quả này trong định lý tiếp theo.

Định lý 1.3.27 ([6], [14], [15]). *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R :*

- (1) *Vành R là Artin ideal chính.*
- (2) *Mỗi R -môđun tựa nội xạ là tựa xạ ảnh.*
- (3) *Mỗi R -môđun tựa xạ ảnh là tựa nội xạ.*
- (4) *Mỗi vành thương của R là vành tựa Frobenius.*

Định nghĩa 1.3.40 ([44, pp. 13]). Một vành R được gọi là *a -vành phải* nếu mỗi ideal phải của R là bất biến đẳng cấu.

CHƯƠNG 2. LỚP MÔĐUN GIẢ XẠ ẢNH VÀ CÁC VÀNH LIÊN QUAN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu môđun giả xạ ảnh trên các lớp vành cổ điển.

2.1. Môđun giả xạ ảnh trên vành nửa hoàn chỉnh, vành hoàn chỉnh

Đặc trưng của vành hoàn chỉnh phải thông qua phủ giả xạ ảnh của môđun như sau:

Định lý 2.1.5. *Vành R là hoàn chỉnh phải khi và chỉ khi môđun $M \oplus F$ có phủ giả xạ ảnh, trong đó M là R -môđun nửa đơn và F là R -môđun tự do.*

Trong định lý sau, chúng tôi đặc trưng S -vành phải thông qua tính giả xạ ảnh và tính tựa xạ ảnh của môđun.

Định lý 2.1.6. *Cho R là vành. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

- (1) R là S -vành phải.
- (2) *Mỗi R -môđun hữu hạn sinh phẳng là tựa xạ ảnh.*
- (3) *Mỗi R -môđun hữu hạn sinh phẳng là giả xạ ảnh.*

Định nghĩa 2.1.8. Môđun M được gọi là Π -giả xạ ảnh nếu tích trực tiếp của một họ tùy ý các bản sao của M là giả xạ ảnh.

Chúng tôi cũng chỉ ra đặc trưng vành bằng cách xem xét tính giả xạ ảnh của tích trực tiếp các môđun xạ ảnh (phẳng).

Định lý 2.1.9. *Cho R là vành. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

- (1) Vành R là coherent trái và hoàn chỉnh phải.
- (2) Tích trực tiếp một họ bất kỳ các bản sao của R là R -môđun xạ ảnh.
- (3) Tích trực tiếp của các R -môđun xạ ảnh là giả xạ ảnh.
- (4) Tích trực tiếp của các R -môđun phẳng là giả xạ ảnh.
- (5) Mỗi R -môđun xạ ảnh là Π -giả xạ ảnh.

2.2. Môđun giả xạ ảnh trên vành nửa di truyền, vành di truyền

Định lý sau là đặc trưng vành nửa di truyền phải thông qua tính giả xạ ảnh của môđun con hữu hạn sinh của môđun xạ ảnh và idêan phải chính trong vành tự đồng cấu của môđun tự do.

Định lý 2.2.1. *Các khẳng định sau là tương đương đối với vành R :*

- (1) R là vành nửa di truyền phải.
- (2) Mỗi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun xạ ảnh là giả xạ ảnh.
- (3) Với mọi R -môđun hữu hạn sinh tự do F , mỗi idêan phải chính của $S = \text{End}(F)$ là S -môđun giả xạ ảnh.

Sau đây là đặc trưng của lớp vành vừa là nửa di truyền phải (trái), vừa là S -vành phải (trái) thông qua tính giả xạ ảnh của môđun.

Định lý 2.2.3. *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R :*

- (1) R là nửa di truyền phải và S -vành phải.

- (2) R là nửa di truyền trái và S -vành trái.
- (3) Mỗi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun phải phải là giả xạ ảnh.
- (4) Mỗi môđun con hữu hạn sinh của R -môđun trái phải là giả xạ ảnh.

Chúng tôi cũng nghiên cứu đặc trưng vành nửa di truyền và Π -coherent thông qua tính giả xạ ảnh của môđun phải (trái) hữu hạn sinh xoắn và được kết quả sau.

Định lý 2.2.5. *Các khẳng định sau là tương đương đối với vành R :*

- (1) R là nửa di truyền và Π -coherent.
- (2) Mỗi R -môđun phải hữu hạn sinh xoắn là xạ ảnh.
- (3) Mỗi R -môđun phải hữu hạn sinh xoắn là giả xạ ảnh.
- (4) Mỗi R -môđun trái hữu hạn sinh xoắn là xạ ảnh.
- (5) Mỗi R -môđun trái hữu hạn sinh xoắn là giả xạ ảnh.

Định lý 2.2.1 cho thấy rằng vành nửa di truyền có thể đặc trưng thông qua tính giả xạ ảnh của môđun con hữu hạn sinh của môđun xạ ảnh. Khi mở rộng điều kiện này sang môđun con bất kỳ, chúng tôi thu được đặc trưng vành di truyền.

Định lý 2.2.6. *Cho vành R . Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:*

- (1) Vành R là di truyền phải.
- (2) Mỗi môđun con của R -môđun xạ ảnh là giả xạ ảnh.

(3) *Mỗi idêan phải chính của $S = \text{End}(F)$ là giả xạ ảnh với F là R -môđun tự do.*

Từ Định lý 2.2.6, nếu xét các môđun phẳng thay vì môđun xạ ảnh, chúng tôi chứng minh được rằng vành di truyền và nửa nguyên sơ có thể được đặc trưng thông qua tính giả xạ ảnh của mọi môđun con của môđun phẳng.

Định lý 2.2.7. *Các phát biểu sau là tương đương đối với vành R :*

- (1) *R là di truyền và nửa nguyên sơ.*
- (2) *R là hoàn chỉnh phải và di truyền phải.*
- (3) *R là hoàn chỉnh trái và di truyền trái.*
- (4) *Mỗi môđun con của R -môđun phải phẳng là giả xạ ảnh.*
- (5) *Mỗi môđun con của R -môđun trái phẳng là giả xạ ảnh.*

Chúng tôi cũng xác định được đặc trưng vành thông qua tính giả xạ ảnh của môđun xoắn.

Định lý 2.2.8. *Cho R là vành. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

- (1) *R là di truyền và nửa nguyên sơ.*
- (2) *Mỗi R -môđun phải xoắn là xạ ảnh.*
- (3) *Mỗi R -môđun trái xoắn là xạ ảnh.*
- (4) *Mỗi R -môđun phải xoắn là giả xạ ảnh.*
- (5) *Mỗi R -môđun trái xoắn là giả xạ ảnh.*

2.3. Môđun giả xạ ảnh trên vành nửa địa phương và vành Artin idêan chính

Trong định lý sau, chúng tôi đưa ra đặc trưng vành nửa địa phương thông qua tính giả xạ ảnh của các môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy.

Định lý 2.3.2. *Các phát biểu sau là tương đương đối với vành R :*

- (1) R là nửa địa phương.
- (2) Mỗi R -môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy là môđun Artin.
- (3) Mỗi R -môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy là giả xạ ảnh.

Ngoài ra, nếu điều kiện (1) được thỏa mãn thì ba điều kiện trên cũng tương đương khi xét trên các R -môđun trái.

Faith và Walker đã đặc trưng vành tựa Frobenius là vành mà mọi môđun xạ ảnh cũng là nội xạ và ngược lại. Dựa trên các kết quả của Fuller, Faith và Byrd (Định lý 1.3.27), ta thấy rằng trên vành Artin idêan chính, môđun tựa xạ ảnh trùng với môđun đối ngẫu. Từ đó, chúng tôi khảo sát điều kiện để môđun giả xạ ảnh trùng với môđun giả nội xạ. Kết quả được nêu trong định lý sau.

Định lý 2.3.3. *Cho vành R . Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

- (1) Vành R là Artin idêan chính.
- (2) Mỗi R -môđun phải giả xạ ảnh là tựa nội xạ.
- (3) Mỗi R -môđun phải giả xạ ảnh là giả nội xạ.
- (4) Mỗi R -môđun phải giả nội xạ là tựa xạ ảnh.
- (5) Mỗi R -môđun phải giả nội xạ là giả xạ ảnh.

CHƯƠNG 3. LỚP A -VÀNH VÀ TỔNG QUÁT HÓA

Trong chương này, chúng tôi sẽ nghiên cứu lớp vành mà mọi idêan phải là bất biến đẳng cấu với điều kiện I -hữu hạn. Chúng tôi định nghĩa lớp vành mà mọi idêan phải của vành là bất biến lũy linh và gọi nó là n -vành phải. Một số tính chất và cấu trúc của lớp vành này cũng được nghiên cứu.

3.1. Lớp a -vành phải

3.1.1. Lớp a -vành phải I -hữu hạn

Định lý sau đây là sự phân tích của a -vành phải I -hữu hạn.

Định lý 3.1.4. *Mỗi a -vành phải I -hữu hạn là tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn và một vành nửa hoàn chỉnh cơ sở.*

3.1.2. Lớp a -vành phải nửa hoàn chỉnh có đế cốt yếu

Trong phần này, chúng tôi xét R là a -vành phải I -hữu hạn sao cho mỗi idêan phải cực tiểu là linh hóa tử phải, $\text{Soc}(R_R) = \text{Soc}({}_R R) = S \leq^e R_R$. Chúng tôi nghiên cứu a -vành phải I -hữu hạn không phân tích được thông qua hoán vị Nakayama và đi đến kết luận điều kiện đủ để lớp vành này là tựa Frobenius.

Định lý 3.1.13. *Nếu R là vành không phân tích được, không là vành đơn và có các phần tử lũy đẳng không tầm thường thì R là vành tựa Frobenius.*

3.2. Vành mà mỗi idêan phải bất biến lũy linh

3.2.1. Định nghĩa và các tính chất

Định nghĩa 3.2.1. Một vành R được gọi là **n -vành phải** nếu mỗi idêan phải của R là bất biến lũy linh.

Ví dụ 3.2.3. (1) Mỗi miền nguyên R là n -vành mà không là a -vành.

(2) Cho $Q = \prod_{i=1}^{\infty} F_i$ trong đó $F_i = \mathbb{K}$ là trường với mọi $i \in \mathbb{N}$ và $|\mathbb{K}| > 2$. Gọi R là vành con của Q được sinh bởi $\bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i$ và 1_Q . Khi đó, R là n -vành mà không là a -vành.

Chúng tôi cũng xác định được đặc trưng của n -vành phải liên quan đến idêan phải cốt yếu.

Mệnh đề 3.2.4. Các phát biểu sau là tương đương đối với vành R :

- (1) R là n -vành phải.
- (2) Mỗi idêan phải cốt yếu của R là bất biến lũy linh.
- (3) Vành R là bất biến lũy linh phải và mỗi idêan phải cốt yếu của R là T -môđun trái, trong đó T là vành con của R có tập sinh là phần tử đơn vị và các phần tử lũy linh của R , mà các phần tử lũy linh này mở rộng được thành các tự đồng cấu lũy linh của bao nội xạ $E(R_R)$.

Sau đây, chúng tôi trình bày thành phần thuần nhất không đơn của n -vành phải.

Định lý 3.2.8. Mỗi n -vành phải R có hữu hạn thành phần thuần nhất không đơn và mỗi thành phần này có tập chỉ số hữu hạn. Hơn nữa, mỗi thành phần thuần nhất không đơn của R là nội xạ.

3.2.2. Sự phân tích của n -vành phải và các vành liên quan

Kết quả sau đây trình bày sự phân tích của n -vành phải thành tổng trực tiếp của hai vành có cấu trúc khác nhau. Kết quả này có ý nghĩa trong nghiên cứu n -vành phải, đặc biệt là chứng minh các tính chất phức tạp.

Định lý 3.2.13. *Mỗi n -vành phải là tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn chính phương đầy đủ và một vành không chính phương phải.*

Thông qua tính chất giản ước trong của vành Artin nửa đơn và vành không chính phương, chúng tôi kết luận tính chất giản ước trong của n -vành phải.

Định lý 3.2.15. *Mỗi n -vành phải có tính chất giản ước trong.*

Mỗi a -vành phải nửa nguyên tố có để phải bằng không là vành chính quy mạnh. Tương tự, chúng tôi cũng chứng minh kết quả này đối với trường hợp n -vành phải chính quy không có môđun con đơn.

Định lý 3.2.20. *Nếu R là n -vành phải chính quy có $\text{Soc}(R_R) = 0$ thì R là vành chính quy mạnh.*

Nghiên cứu đặc trưng các n -vành phải nguyên tố có để phải khác không, chúng tôi có kết quả:

Mệnh đề 3.2.22. *Cho R là vành có để phải khác không. Khi đó, R là n -vành phải nguyên tố khi và chỉ khi vành R là Artin đơn.*

Định lý sau đây là tính bất biến lũy linh của vành ma trận $\mathbb{M}_n(R)$.

Định lý 3.2.23. *Cho số nguyên $n > 1$, vành R là Artin nửa đơn*

khi và chỉ khi vành ma trận $\mathbb{M}_n(R)$ là $\mathfrak{n}$ -vành phải.

Một cách tương tự như a -vành phải, chúng tôi kiểm tra tính hữu hạn trực tiếp của vành các ma trận vuông cấp n trên $\mathfrak{n}$ -vành phải và khẳng định mỗi $\mathfrak{n}$ -vành phải ổn định hữu hạn.

Định lý 3.2.26. *Mỗi $\mathfrak{n}$ -vành phải là vành ổn định hữu hạn.*

3.2.3. Môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức

Định lý sau đây là đặc trưng của môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức.

Định lý 3.2.27. *Cho $K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ là vành Artin trái và (X, Y, f) là K -môđun bất biến lũy linh. Khi đó,*

(1) *Y là S -môđun bất biến lũy linh.*

(2) *$H = \{x \in X | f(x \otimes m) = 0, \forall m \in M\}$ là R -môđun bất biến lũy linh.*

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Kết luận

Một số kết quả chính chúng tôi thu được trong luận án như sau:

- (1) Đặc trưng lớp vành coherent trái và hoàn chỉnh phải thông qua tính giả xạ ảnh của tích trực tiếp các môđun xạ ảnh (phẳng) (Định lý 2.1.9).
- (2) Đặc trưng lớp vành nửa di truyền và S -vành thông qua tính giả xạ ảnh của môđun con hữu hạn sinh của môđun phải (trái) phẳng (Định lý 2.2.3).
- (3) Đặc trưng lớp vành nửa di truyền và Π -coherent thông qua tính giả xạ ảnh của môđun phải (trái) hữu hạn sinh xoắn (Định lý 2.2.5).
- (4) Đặc trưng lớp vành di truyền và nửa nguyên sơ thông qua tính giả xạ ảnh của môđun con của môđun phẳng hay tính giả xạ ảnh của môđun xoắn (Định lý 2.2.7, Định lý 2.2.8).
- (5) Đặc trưng lớp vành nửa địa phương thông qua tính giả xạ ảnh của môđun hữu hạn sinh nửa nguyên thủy (Định lý 2.3.2).
- (6) Khẳng định đặc trưng của lớp vành Artin idêan chính là lớp vành có lớp môđun giả xạ ảnh trùng với lớp môđun giả nội xạ (Định lý 2.3.3).
- (7) Mô tả cấu trúc của lớp a -vành phải I -hữu hạn (Định lý 3.1.4).

- (8) Nghiên cứu các a -vành phải không phân tích được thông qua điều kiện Nakayama và chứng minh lớp vành này có lớp môđun nội xạ và xạ ảnh trùng nhau (Định lý 3.1.13).
- (9) Phân tích các $\mathbf{n}$ -vành phải thành tổng trực tiếp của một vành Artin nửa đơn chính phương đầy đủ và một vành không chính phương phải (Định lý 3.2.13).
- (10) Khẳng định tính chất giản ước trong của $\mathbf{n}$ -vành phải (Định lý 3.2.15).
- (11) Mô tả đặc trưng của môđun bất biến lũy linh trên vành ma trận tam giác hình thức (Định lý 3.2.27).

2. Kiến nghị

Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ xem xét mỗi môđun nửa nguyên thủy giả xạ ảnh có suy ra được rằng vành là nửa địa phương hay không. Ngoài ra, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu cấu trúc của $\mathbf{n}$ -vành trong trường hợp vành là vành ma trận tam giác hình thức.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ

- (1) Trương Thị Thúy Vân (2023), “Các đặc trưng của PC2-môđun”, *Tạp chí Khoa học và Công nghệ - Đại học Đà Nẵng*, 21(3), pp. 58-62.
- (2) Nguyen Thi Thu Ha and Truong Thi Thuy Van (2024), “Structure of rings via pseudo-projective modules”, *Filomat*, 38(18), pp. 6423-6432.
- (3) Truong Cong Quynh and Truong Thi Thuy Van (2024), “On Nilpotent-invariant One-sided Ideals”, *Acta Math. Vietnam.*, 49, pp. 115-128.
- (4) Truong Thi Thuy Van, Alghamdi, A. M. and Alkinani, A. A. (2024), “On semiperfect a -rings”, *Ukr. Math. J.*, 76(6), pp. 1025-1034.